算数オリンピックチャレンジ 2025　解説

【問題 1 】
8 個の整数に「43」が含まれていますが、43 は 7、13、17、32 のいずれの倍数でもありません。このことから、8 個の整数の中に少なくとも一つは、7、13、17、32 のうち二つの整数の公倍数があることが分かります。
しかし、7 と 13 の最小公倍数 91 しか 2 桁にはなりません。よって「91」が含まれていることが分かります。
次に 32 の倍数を考えます。
32 の倍数で 2 桁であるものは 32、64、96 ですが、「91」が含まれているため、96 は不適当です。よって 32 の倍数は「32」と「64」の 2 個と分かります。
さらに 17 の倍数を考えます。
17 の倍数で 2 桁であるものは 17、34、51、68、85 ですが、「32」「64」「91」が含まれているため、34、51、68 は不適当です。よって 17 の倍数は「17」と「85」の 2 個と分かります。
以上から、整数 A は「17」「32」「43」「64」「85」「91」を含むため、
　917、6432、85
という並びを持つことになります。
この 3 つを一列に並べたとき、つながる部分のとなり合う 2 つの数字が 2 桁の 7 の倍数と 13 の倍数となるものは、917856432 だけです。

【問題２】

$$
\begin{aligned}
&1\times2-1 &&=1\\
&1\times2\times3-1\times2 &&=2\times(1\times2)\\
&1\times2\times3\times4-1\times2\times3 &&=3\times(1\times2\times3)\\
&\cdots\\
&1\times2\times3\times\cdots\times98\times99-1\times2\times3\times\cdots\times98\\
& &&=98\times(1\times2\times3\times\cdots\times98)\\
&1\times2\times3\times\cdots\times99\times100-1\times2\times3\times\cdots\times99\\
& &&=99\times(1\times2\times3\times\cdots\times99)
\end{aligned}
$$

であることから、

$$
\begin{aligned}
1+1\times2+1\times2\times3+\cdots+1\times2\times3\times\cdots\times98\times99&\\
+1\times2+1\times2\times3+\cdots+1\times2\times3\times\cdots\times98\times99&\\
+1\times2\times3+\cdots+1\times2\times3\times\cdots\times98\times99&\\
\cdots&\\
+1\times2\times3\times\cdots\times98\times99&
\end{aligned}
$$

は

$$
\begin{aligned}
&(1\times2-1)+(1\times2\times3-1\times2)+(1\times2\times3\times4-1\times2\times3)+\cdots\\
&\qquad+(1\times2\times3\times\cdots\times98\times99-1\times2\times3\times\cdots\times98)\\
&\qquad+(1\times2\times3\times\cdots\times99\times100-1\times2\times3\times\cdots\times99)\\
&=\underline{1\times2\times3\times\cdots\times99\times100-1}
\end{aligned}
$$

と等しいことが分かります。

ここで $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100$ の値を考えます。

1 以上 100 以下の整数の中に 5 の倍数は 20 個、25 の倍数は 4 個ありますから、

$1\times2\times3\times\cdots\times99\times100$ の値は素因数 5 をちょうど 24 個含みます。

一方で $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100$ の値に含まれる素因数 2 の個数は、明らかに 24 よりも大きいです。

よって $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100$ の値は、下 24 桁に 0 が並び、その上の 25 桁目は 0 でない数字だと分かります。

したがって $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100-1$ の値は、下 $\underline{\underline{24}}$ 桁に $\underline{\underline{9}}$ が並び、その上の 25 桁目は 9 でない数字ということになります。

【問題３】

下の図１のように、台形 DAFE を辺 DA で折り返して、台形 DAHG を作ります。

すると、角 BDA＝角 EDC＝角 GDC(＝●)なので、3 点 G、D、B は一直線上に並ぶことが分かります。

また、GE//HB なので、角 EGB＝角 GBH(＝○)となります。

このことから、角 EGB＝角 EBG(＝○)より、△EBG が EB＝EG の二等辺三角形であることが分かります。

さらに△DEG が DE＝DG の二等辺三角形であることから、角 EGB＝角 GED(＝○)であることも分かります。

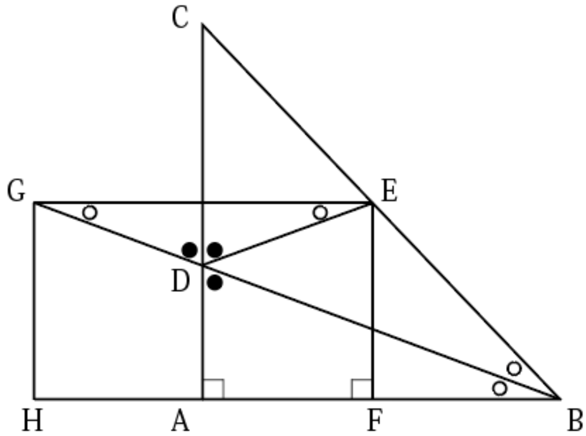
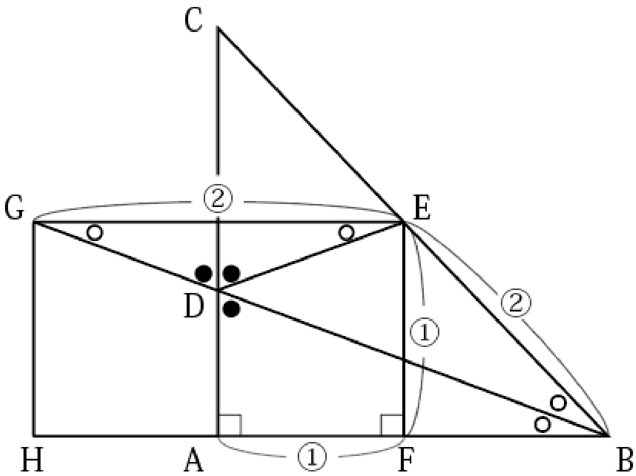


図１

さて EF＝AF＝①とすると、EG＝②ですから、EB＝②です。

つまり△EBF は角 EBF＝30° の直角三角形ということになります。

ここまでをまとめたものが下の図です。



つまり○＝15° ということが分かりますから、角 DEC＝○＋○○＝15×3＝45° です。

【問題４】

(1)

１から９の整数を３つずつ３組に分けて、各組の和が９の倍数になる組み合わせは

　A：1＋8＋9、2＋3＋4、5＋6＋7

　B：1＋2＋6、3＋7＋8、4＋5＋9

　C：1＋3＋5、2＋7＋9、4＋6＋8

の３通りしかなく、縦の３列、横の３列に記入する数の組み合わせが、それぞれ A、B、C のいずれかになります。

さて、縦が A で横が B の場合、縦が A で横が C の場合、縦が B で横が C の場合、いずれも下のように実現可能であり、列の入れ替えを除けば１通りずつしかありません。

縦がAで
横がB

1	2	6
8	3	7
9	4	5

縦がAで
横がC

1	3	5
8	4	6
9	2	7

縦がBで
横がC

1	3	5
2	7	9
6	8	4

縦と横のペアの作り方が 3×2＝6 通りあり、また縦列の入れ替え、横列の入れ替えがそれぞれ 3×2×1＝6 通りずつあることを考慮すると、答えは

　6×6×6＝216 通り

となります。

(2)

右のように９つのマスに A から I の名前をつけます。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A、B、D、E の記入の仕方は、９通りずつあります。

A、B、D、E に記入した後で、A＋B＋C、D＋E＋F、A＋D＋G、B＋E＋H が９の倍数になるような C、F、G、H への記入の仕方は、１通りずつです。

I 以外を記入した後で、G＋H＋I が９の倍数になるような I への記入の仕方は、1 通りです。

このとき、

　C＋F＋I＝(A＋B＋C)＋(D＋E＋F)＋(G＋H＋I)－(A＋D＋G)－(B＋E＋H)

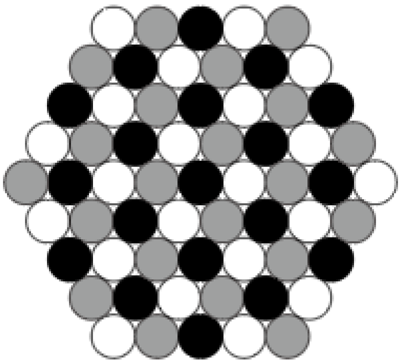
なので、C＋F＋I は自動的に９の倍数となります。

よって答えは

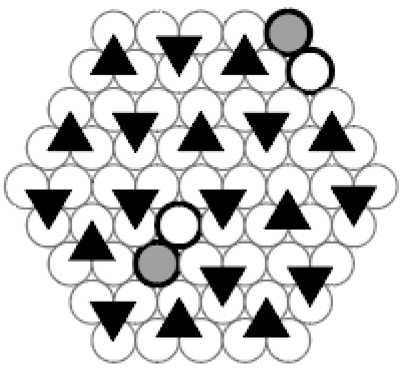
　9×9×9×9×1×1×1×1×1＝6561 通り

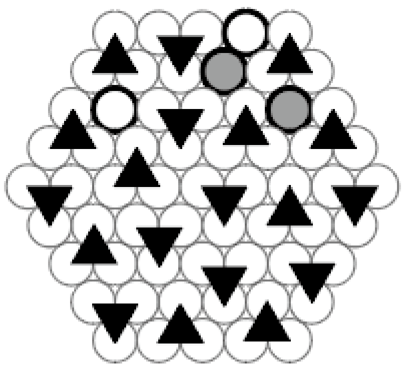
となります。

【問題５】
下の図のように、61 個の丸を、白、灰、黒の 3 つのグループに分けます。このとき、丸をまっすぐにたどると、白→灰→黒→白→…または白→黒→灰→白→…となるように分けています。



ここで、図 2 のようにとなり合う 3 個の丸は、白、灰、黒がそれぞれ 1 個ずつ集まっていることに注意します。
上の図では、白は 21 個、灰は 21 個、黒は 19 個あります。
よって 19 回取りのぞくと、黒がなくなり、それ以上取りのぞくことができません。
このとき残る丸の数は 61－(3×19)＝4 個となります。
下の図は取りのぞき方の例です。(取りのぞくとなり合う 3 個の丸を▲で、残る丸を太線で表しています)





またこのとき、黒がすべて取りのぞかれますから、必ず取りのぞかれる位置にある丸は 19 個です。
(すべての白と灰は、2 つの例を回転させたり裏がえしたりした取りのぞき方をすることで、取りのぞかれずに残る場合を作ることができます)

【問題６】

左からア列、上からイ行にあるコマを(ア、イ)と表します。

また、1 以上 8 以下の整数 N について、ア、イのうち小さくないほうの値が N であるようなコマを「第 N 群のコマ」と呼ぶことにします。

つまり、

(1、1)のコマは第 1 群のコマ

(1、2)(2、2)(2、1)のコマは第 2 群のコマ

(1、3)(2、3)(3、3)(3、2)(3、1)のコマは第 3 群のコマ

…

(1、8)(2、8)…(7、8)(8、8)(8、7)…(8、2)(8、1)のコマは第 8 群のコマ

ということになります。

このとき、第 N 群には 2×N－1 個のコマがあることになります。

さて、

A＝1 の操作を行うと、第 1 群のコマだけがひっくり返される。

A＝1、A＝2 の操作を続けて行うと、第 2 群のコマだけひっくり返されたことと同じ。

A＝2、A＝3 の操作を続けて行うと、第 3 群のコマだけひっくり返されたことと同じ。

…

A＝7、A＝8 の操作を続けて行うと、第 8 群のコマだけひっくり返されたことと同じ。

であることから、

花子さんは第 N 群のコマをひっくり返すか返さないかを適切に判断することで、その第 N 群のコマのうち上の面が黒のコマを「N 個以上」にすることができます。

(例)第 3 群の 5 個のコマのうち、上の面が黒のコマが

0、1、2 個の場合　→　A＝2、A＝3 の操作を続けて行うことで、上の面が黒のコマを 5、4、3 個にすることができる。

3、4、5 個の場合　→　なにもしないか、A＝3 の操作を偶数回行うことで、上の面が黒のコマを 3、4、5 個にすることができる。

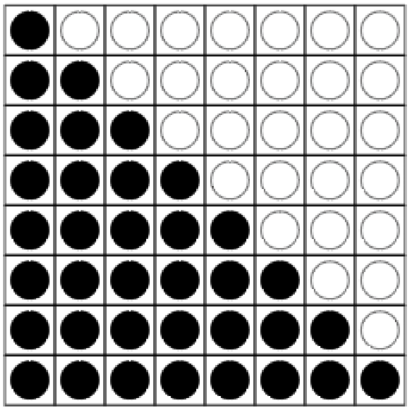
このように、第 3 群のコマのうち上の面が黒のコマを 3 個以上にすることが可能。

よって花子さんは、太郎君のコマの置き方によらず、上の面が黒のコマを

1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＝36 個

以上にすることができます。

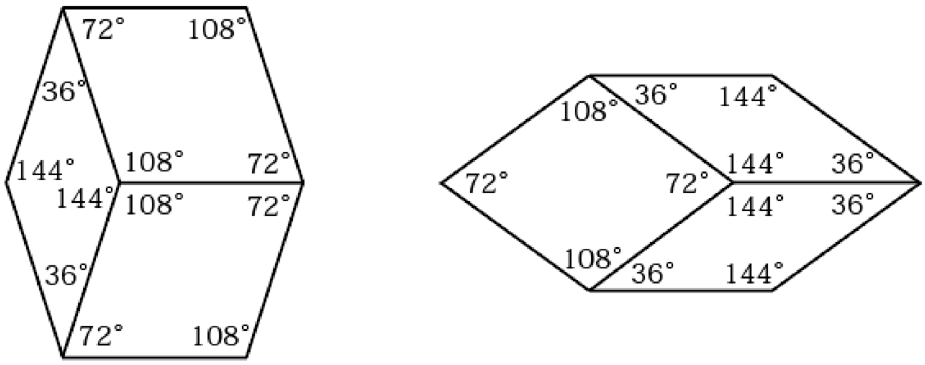
一方で、太郎君が次の図のようにコマを置いたとすると、花子さんがどのように操作をしたとしても、第 N 群のコマのうち上の面が黒のコマは「N 個以下」となります。



つまり上の面が黒のコマは(1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＝)36個以下となります。
以上からX＝36です。

【問題７】

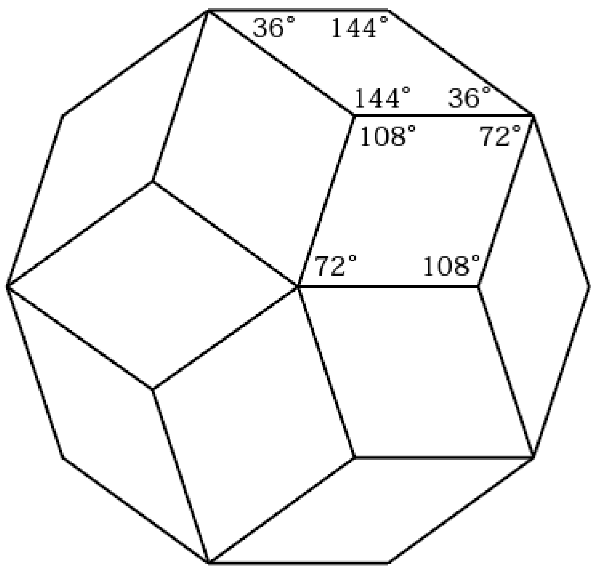
下の図のように、六角形Ａと六角形Ｂは、それぞれ２種類の平行四辺形に分割できます。



Ａ　　　　　　　　　　　　　Ｂ

すると、「六角形Ａの面積と六角形Ｂの面積の合計」は、「144°・36°の平行四辺形」３個と、「108°・72°の平行四辺形」３個の合計となります。

一方で、「１辺の長さが 1cm の正十角形の面積」は、下の図のように、「144°・36°の平行四辺形」５個と、「108°・72°の平行四辺形」５個に分割することができます。



よって求める値は $\underline{\underline{\dfrac{3}{5}}}$ です。

※時間のあるときに、「ペンローズ・タイル」を検索してみてください。

【問題８】

A さん、B さん、C さんの 3 人が同時にスタートしてから、スタートした地点に同時につくまでに、それぞれ a 周、b 周、 c 周したとします。ただし a、b、c は整数です。

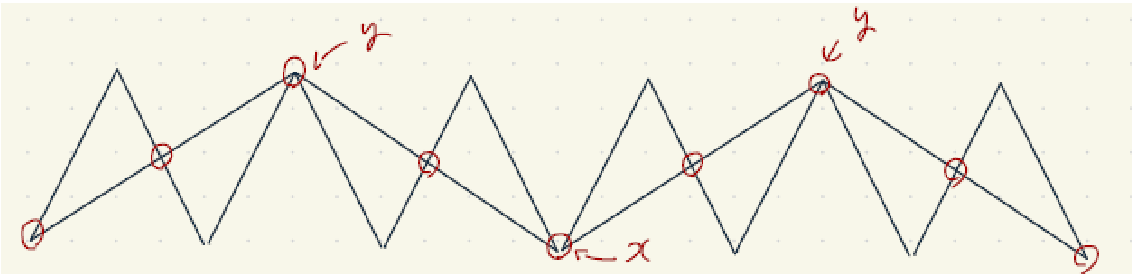
3 人とも動くと難しいので、以下、A さんを固定して考えます。

つまり、a と b の差を m、a と c の差を n として、A さんから B さんと C さんまでの距離の時間変化を表すダイヤグラムを考えると、m 個の山と n 個の山が描かれることになります。

そして(m、n)の関係には、下の 2 種類があることが分かります。

① m と n の最大公約数を g としたとき、$\dfrac{m}{g}$ 、 $\dfrac{n}{g}$ がともに奇数となる場合

(例) (m、n)＝(6、2)の場合



交点は 9 個となります。これを計算で考えると、

m の 1 山に交点が 2 個ずつあるとして、2×m＝2×6＝12 個。

しかし 6 と 2 の最大公約数＝2 より、植木算の考え方をすると、

ダイヤグラムの下の重なり x＝g－1＝2－1＝1 個。

※「2 個の繰り返し」の間の数で 1 個ということ

ダイヤグラムの上の重なり y＝x＋1＝g＝2 個。

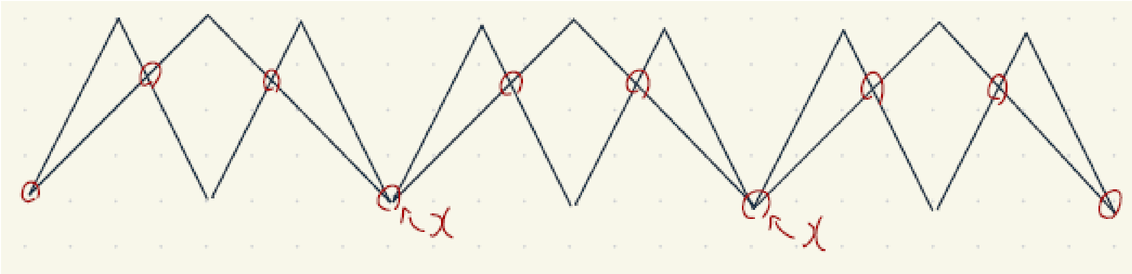
したがって交点の数は、12－1－2＝9 個。

となります。

つまり交点の個数は、2×m－(g－1)－g＝<u>2×m－2×g＋1</u> と計算できることが分かります。

② ①以外の場合(m と n の最大公約数を g としたとき、$\dfrac{m}{g}$ 、 $\dfrac{n}{g}$ の少なくとも一つが偶数となる場合)

(例) (m、n)＝(6、3)の場合



交点は 10 個となります。これを計算で考えると、

m の 1 山に交点が 2 個ずつあるとして、2×m＝2×6＝12 個。

しかし 6 と 3 の最大公約数＝3 より、植木算の考え方をすると、

ダイヤグラムの下の重なり x＝g－1＝3－1＝2 個。

※「3 個の繰り返し」の間の数で 2 個ということ

ダイヤグラムの上の重なり y は、こちらは現れない。

したがって交点の数は、12－2＝10 個。

となります。

つまり交点の個数は、2×m－(g－1)＝2×m－g＋1 と計算できることが分かります。

さて、この問題は、ダイヤグラムの交点が 10 個、16 個となる問題です。
ここまで考えてきた m と n を、A さんを固定した場合に限らず、誰か一人を固定して、他の 2 人との周回の差として一般化します。
10 も 16 も偶数ですから、①の場合は明らかに不適当です。
よって、②の場合で、2×m－g＋1＝10、16 となるときを考えていきます。

・ 2×m－g＋1＝10 のとき　つまり　2×m－g＝9 のとき

(m、g)＝(5、1)(6、3)(7、5)(8、7)(9、9)(10、11)…

と候補に挙がりますが、対応する n があるかどうか、$\frac{m}{g}$ 、 $\frac{n}{g}$ の少なくとも一つが偶数かどうか、などを調べると、

(m、n)＝(5、2)(5、4)(6、3)

のみが求まります。

※このときの m、n は、a と c の差、b と c の差に対応します。

・ 2×m－g＋1＝16 のとき　つまり　2×m－g＝15 のとき

同様に考えると、

(m、n)＝(8、1)(8、3)(8、5) (8、7)(9、6)(10、5)

のみが求まります。

※このときの m、n は、a と b の差、b と c の差に対応します。

(m、n)の組み合わせ３組と６組で、数字が共通しているものを考えると、

(5、2)と(8、5)

(5、2)と(10、5)

(5、4)と(8、5)

(5、4)と(10、5)

(6、3)と(9、6)

の５通りが考えられますが、対応する a、b、c が存在するものは、(6、3)と(9、6)のみです。すなわちこのときは、

b と c の差が 6

a と c の差が 3

a と b の差が 9

となり、例えば(a、b、c)＝(1、10、4)のように a、b、c が求まります。

最後に、この a、b、c のときに□に入る数を考えます。

m＝a と b の差＝9、n＝a と c の差＝3 として、①の式を使うと、

2×9－2×3＋1＝13 回目

これが答えです。