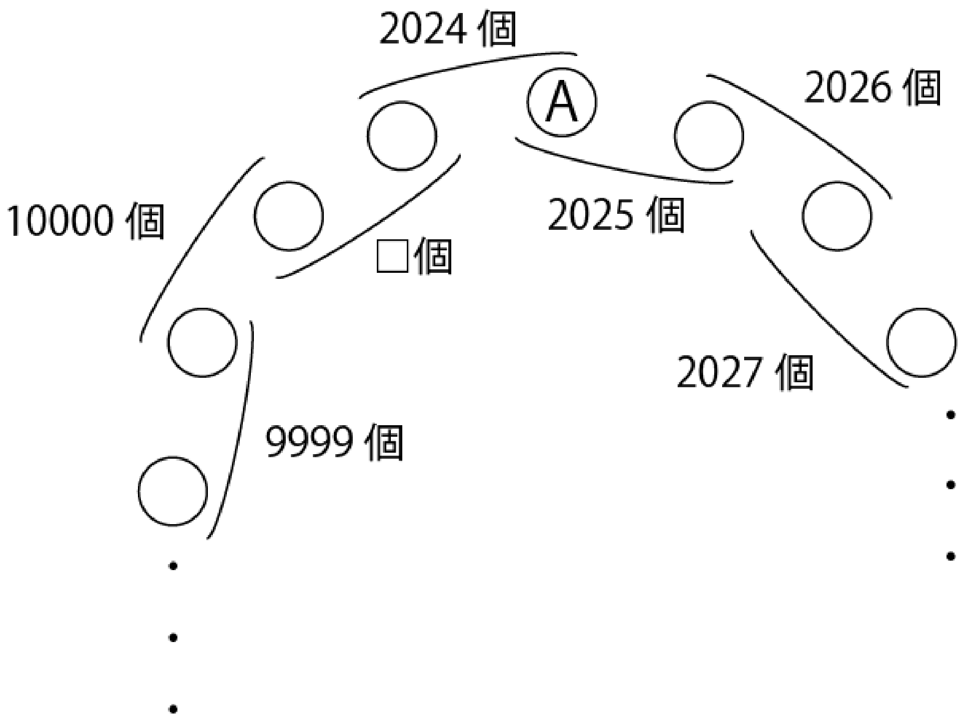
算数オリンピックチャレンジ2024　解説

【問題１】

人数は（10000＋１）－2024＋１＝7978人と分かります。また、となりあう２人が持っているあめ玉の数を図に表すと、下のようになります。



このとき、

　　2024＋2026＋…＋9998＋10000＝2025＋2027＋…＋9999＋□

となります。計算すると

　　10000＝(2025－2024)＋(2027－2026)＋…＋(9999－9998)＋□

　　10000＝(7978－２)÷２＋□

　　10000＝3988＋□

よって□＝6012となります。

【問題２】
分数Ａ＝分数Ｂの関係から、

① $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

② $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$

③ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$

④ $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

⑤ $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

の５通りについて考えます。
・①について
使う数字が重複しないのは、1/2＝3/6、1/2＝4/8、2/4＝3/6、3/6＝4/8 の４通りありますが、いずれも分数Ｃにあてはまるものがありません。例えば 1/2＝3/6 の場合、残りの数字は 4、5、7、8、9 ですが、分母が分子の２倍となるように数字をあてはめることができません。他も同様です。
・②について
使う数字が重複しないのは、1/3＝2/6、2/6＝3/9 の２通りあります。このとき、2/6＝3/9 の場合は、残りの数字が１、４、５、７、８で、18/54 とするとあてはまります。
・③について
使う数字が重複しないのは、2/3＝4/6、2/3＝6/9 の２通りあります。このとき、2/3＝6/9 の場合は、残りの数字が１、４、５、７、８で、54/81 とするとあてはまります。
・④について
残りの数字は３、５、６、７、９ですが、分母が分子の４倍となるように数字をあてはめることができません。
・⑤について
残りの数字は１、２、５、７、９ですが、分母が分子の 4/3 倍となるように数字をあてはめることができません。
よって答えは 18/54、54/81 です。

【問題３】
下の図１のように、直線 DA 上に DA＝FA となるような点 F をとります。

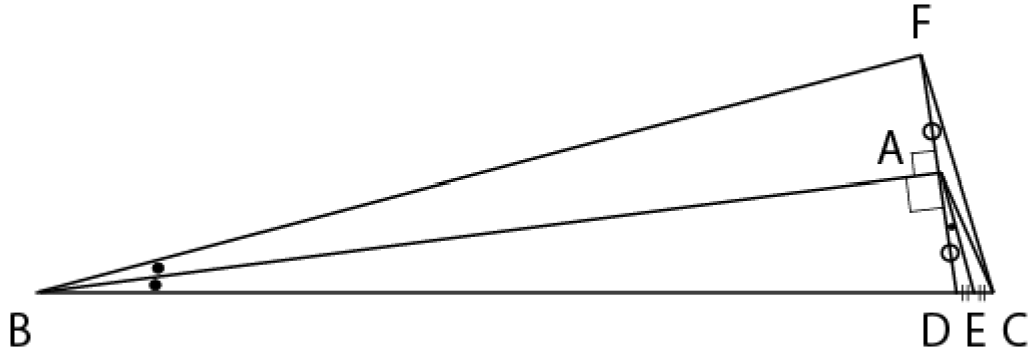


図１

このとき△ABD と△ABF は合同、△ACD の面積＝△FCA の面積となります。
つまり、求める△ABC の面積は、△FBC の半分ということが分かります。…※
ここで角 FBD＝●＋●＝7.5＋7.5＝15° です。
また角 BFD＝180－(90＋7.5)＝82.5° です。
さて△ADE と△FDC は相似ですから、角 BFC＝82.5＋●＝82.5＋7.5＝90° となります。
よって△FBC は 15° を１つの角にもつ直角三角形となります。
つまり△FBC は下の図２の二等辺三角形の半分となります。

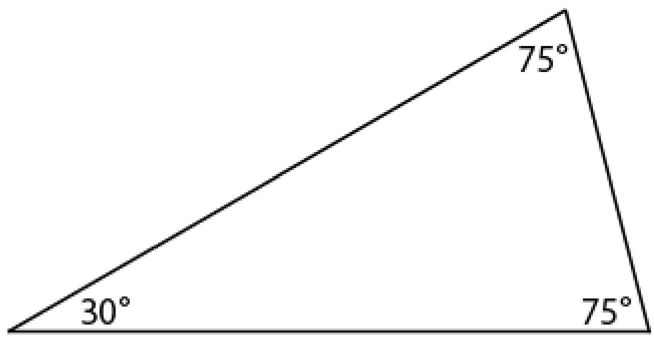
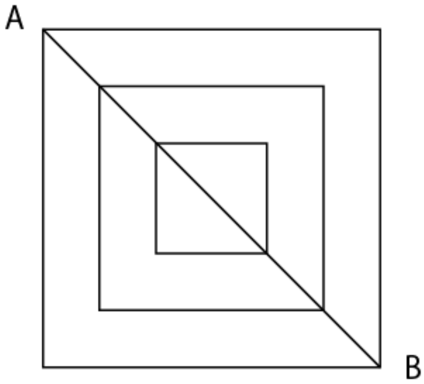


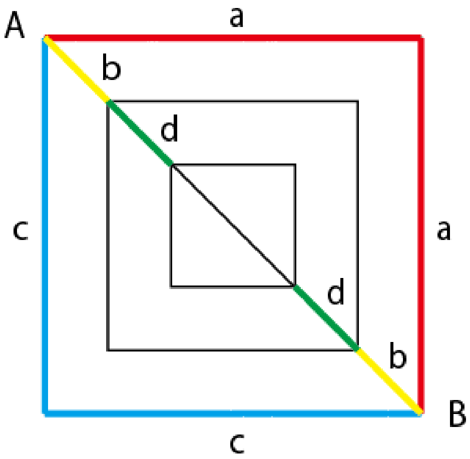
図２

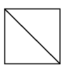
※から、求める△ABC の面積は、図２の二等辺三角形の 1/4 となります。
この二等辺三角形の面積は 10×５÷２＝25cm^2 ですから、△ABC の面積は 25÷４＝ 6.25cm^2。

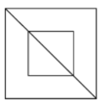
【問題４】
それぞれの点に何本の線が集まっているかを考えると、左上の点（Ａとします）と右下の点（Ｂとします）が一筆書きの始点または終点となることが分かります。



Ａから始まりＢで終わる書き方を考えます。
また、下の図のように道に a、b、c、d と名前をつけます。



d に進んだとき、を通る通り方は、３×２×１＝６通りあります。

b に進んだとき、を通る通り方は、３×２×６＝36 通りあります。

はじめに a、b、c のうち１つを選んで進み、次に残りの２つから選んで進み、最後に残りの１つに進むことを考えると、Ａから始まりＢで終わる書き方は３×２×１×36＝216 通り。
よって全部で 216×２＝432 通り。

【問題５】

求める数の分母を m、分子を n とすると、1.405 $\leqq \frac{n}{m} <$ 1.415 と表せます。

この式を変形していくと、

$$1+\frac{81}{200} \leqq \frac{n}{m} < 1+\frac{83}{200}$$

$$\frac{281}{200}\times m \leqq n < \frac{283}{200}\times m$$

$$81\times m \leqq 200\times(n-m) < 83\times m$$

となります。

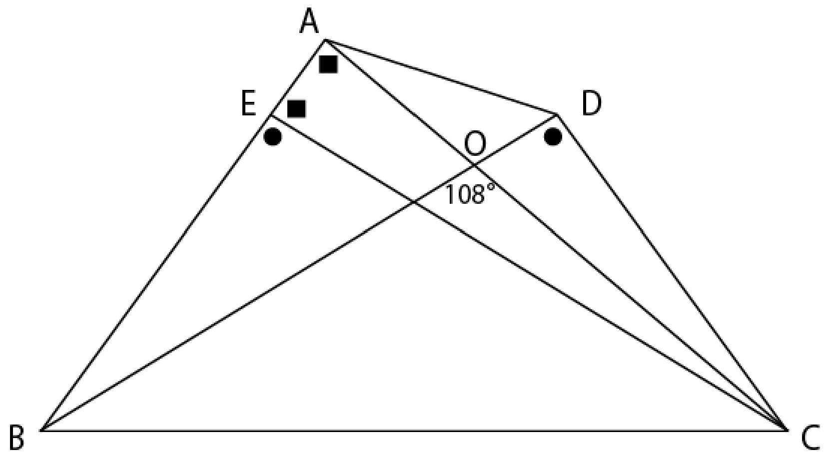
81×m と 83×m を小さい順に並べ、その間に 200 の倍数があるかどうか調べると、m＝17 のときに 81×17＝1377、83×17＝1411 となり、はじめて見つかります。

このとき n－17＝1400÷200＝７なので、n＝７＋17＝24 となります。

m が 17 よりも大きいとき、81×m と 83×m の間にある 200 の倍数は 1400 よりも大きくなりますから、n も 24 よりも大きくなります。

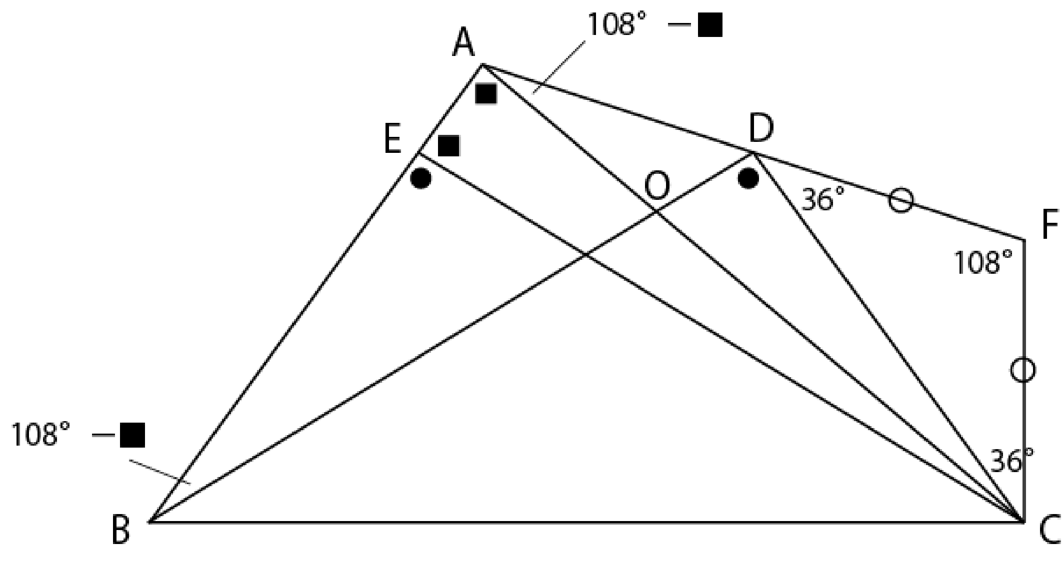
よって $\underline{\underline{24/17}}$ が答えです。

【問題６】
角 OAD＋角 ODA＝180－108＝72°、角 CDA＝360－(54＋54＋108)＝144° なので、角 CAB(■)＋角 CDB(●)＝144＋108－72＝180° …※となります。
辺 AB 上に BE＝CD となるような点Ｅをとると、△BCD と△CBE は合同になります。



※から角 CAB＋角 CEB＝180° と分かります。角 CEA＋角 CEB＝180° でもあるので、角 CAB＝角 CEA(＝■)となります。よって△CAE は CA＝CE の二等辺三角形です。
CE＝BD ですから、CA＝BD と分かります。

さて辺 AD をのばし、その上に FC＝FD となるような点 F をとります
角度は下のようになるので、△ACF と△BDA は相似となりますが、特に CA＝BD なので、△ACF と△BDA は合同となります。



このことから AD＝FC、AB＝FA ですが、FA＝FD＋AD＝AD× 2 なので、AB＝AD× 2 となります。よって 2 倍です。

【問題７】

$$1\times2\times3=\frac{1}{4}\times(1\times2\times3\times4-0\times1\times2\times3)$$

$$2\times3\times4=\frac{1}{4}\times(2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4)$$

のように考えることができます。
よって例えば

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+100\times101\times102$$

$$=\frac{1}{4}\times100\times101\times102\times103$$

となります。
このことから、連続する４個の整数の積が「４×(10000 の倍数)」となる場合について考えればよいことになります。
ここで、４×10000＝(２×２×２×２×２×２)×(５×５×５×５)です。連続する４個の整数の中にある５の倍数の個数は、多くても１個なので、５×５×５×５=625 の倍数が含まれることが分かります。
また、連続する４個の整数の中にある２の倍数の個数は２個であり、そのうちの１つは２と奇数の積となります。よってもう１つの２の倍数は２×２×２×２×２＝32 の倍数となります。
625 との差が３以下である 32 の倍数は、32×19＝608、32×20＝640 であることから存在しません。
625×２＝1250 との差が３以下である 32 の倍数は、32×39＝1248 があります。
1248 と 1250 を含む連続する４個の整数で、積の値が最も小さいのは 1247×1248×1249×1250 です。

$\frac{1}{4}\times$ 1247×1248×1249×1250 は 10000 の倍数ですから、答えは 1247 個目まで足したときです。

【問題８】
2024＝２×２×２×11×23 なので、９マスに入る整数をそれぞれ２、11、23 で何回わることができるかを、２、11、23 ごとに考えます。
・２について
どのたて、よこにならんだ３つの数の積についても、２でわることのできる合計回数は３回です。３＝３＋０＋０、２＋１＋０、１＋１＋１ですから、９マスに３、２、１、０を入れて、どのたて、よこにならんだ３つの数の和も３になるような場合について考えます。
①３を３個入れるとき
例

3	0	0
0	3	0
0	0	3

どのたて、よこにも３、０、０を入れることになります。
このとき３×２×１＝６通りあります。

②３を１個だけ入れるとき
例

3	0	0
0	2	1
0	1	2

３が入ったマスのたて、よこにある４マスには全て０が入ります。
残りの４マスに入る１、２の入れ方を考えると、９×２×１＝18 通りあります。

③３を入れず、２を３個入れるとき
例

2	1	0
0	2	1
1	0	2

どのたて、よこにも２、１、０を入れることになります。

このとき３×２×１×２×１＝12 通りあります。

④３を入れず、２を２個入れるとき
例

2	0	1
0	2	1
1	1	1

２が入らないたて、よこがそれぞれ１列ずつありますが、ここには１、１、１を入れることになります。
つまり１が入る５マスを決めると、残り４マスに入る０、２の入れ方を考えることになり、３×３×２×１＝18 通りあります。

⑤１だけを入れるとき
例

1	1	1
1	1	1
1	1	1

１通りだけです。

以上①～⑤より、６＋18＋12＋18＋１＝55 通り。

・11 について
どのたて、よこにならんだ３つの数の積についても、11 でわることのできる合計回数は１回です。１＝１＋０＋０ですから、どのたて、よこにも１、０、０をならべることしかできません。これは上記「２について」の①と同じで６通りです。

・23 について
上記「11 について」と同様に６通りです。

よって、55×６×６＝1980 通り。