算数オリンピックチャレンジ2023　解説

【問題１】
７！＝７×６×５×４×３×２×１＝５０４０で４桁となってしまうので、７、８、９は使われていないことが分かります。
また６！＝７２０なので、もし６が使われているとすると、３桁の整数 ABC は７２０より大きくなります。しかし７、８、９は使われていないので不適当です。
よって A、B、C はそれぞれ１から５までの整数となります。
また４！＋４！＋４！＝７２で２桁となってしまうので、５が少なくとも１個は使われていることが分かります。

①５が１個だけ使われているとき
（５！＋１！＋１！＝）１２２≦ABC≦１６８（＝５！＋４！＋４！）なので、A＝１となります。よって３桁の整数は１B５か１５C となります。
１！+B！＋５！＝１B５となる B はあるか考えると、B＝４のときに１！＋４！＋５！＝１４５となりあてはまります。
しかし１！＋５！+C！＝１５C となる C はありません。

②５が２個だけ使われているとき
（５！＋５！＋１！＝）２４１≦ABC≦２６４（＝５！＋５！＋４！）なので、A＝２となります。しかし、２！＋５！＋５！＝２４２となり、あてはまりません。

③５が３個使われているとき
５！＋５！＋５！＝３６０となり、あてはまりません。

よって A＝１、B＝４、C＝５が答えです。

【問題２】

１２マスすべてに１００が表示されるとき、全マスの合計は１２００になります。

１回の操作につき全マスの合計は１０だけ増えます。よって操作前の全マスの合計が１０の倍数でない（あ）（い）（う）（え）は１２マスすべてに１００を表示させることができません。

（か）について、右のように市松模様を考えます。

操作前、白いマスに表示された数字の合計は０、グレーのマスに表示された数字の合計は３０です。

１回の操作によって、白いマスとグレーのマスがセットになって、それぞれ５ずつ増えます。

すると白いマスに表示された数字の合計と、グレーのマスに表示された数字の合計も、それぞれ５ずつ増えるため、その差が３０から変わることはありません。よって１２マスすべてに１００を表示させることができません。

（か）

0	5	0
5	0	5
0	5	0
5	0	5

（お）と（き）は、下のようにして１２マスすべてに１００を表示させることができます。

（お）

0	0	0
0	5	0
5	5	5
5	0	5

＋

5	5	5
5		5
5		5
5	5	5

＋

5	5	5
5	5	5
	5	
	5	

→

10	10	10
10	10	10
10	10	10
10	10	10

（き）

5	0	5
5	5	5
0	0	0
5	5	5

＋

5	5	
5	5	5
5		5
5	5	5

＋

	5	5
5	10	5

→

10	10	10
10	10	10
10	10	10
10	10	10

あとは

＋

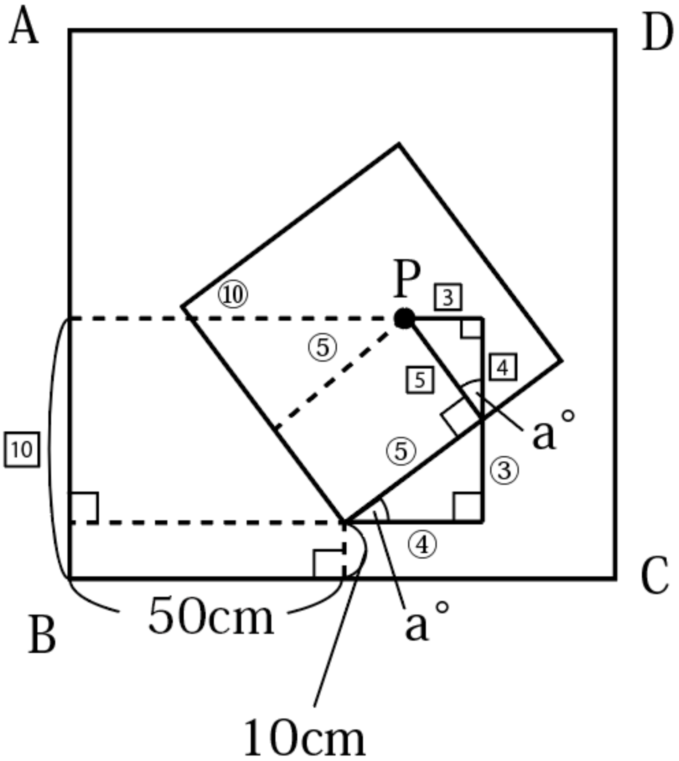
5	5	5
5	5	5
5	5	5
5	5	5

のように増やしていけばよいです。

【問題３】

下図のように、絵Ｙにおいて、点Ｑ（＝点Ｐ）と辺 EF、辺 FG との距離をそれぞれ⑤cm、$\boxed{5}$cm とします。

すると、絵Ｘにおいて点Ｐ（＝点Ｑ）と辺 AB、辺 BC との距離はそれぞれ⑩cm、$\boxed{10}$cm となります。また、図２の直角三角形と相似な直角三角形を考えることで、図のように長さを表すことができます。



等しい長さに注目すると、

$⑩+\boxed{3}＝５０+④$

$\boxed{10}＝\boxed{4}+③+１０$

つまり

$⑥+\boxed{3}＝５０$

$\boxed{6}＝③+１０$

これを解くと、①＝６cm、$\boxed{1}$＝14/3cm となります。

求める長さは⑩＝６０cm と、$\boxed{10}$=140/3cm となります。

作問者より一言
「この問題は数学で習う“複素数平面”が元ネタになっています。」

【問題４】
９９９９－（４桁の強い数）＝（４桁の弱い数）になることに注意すると、
（５桁の弱い数）－（４桁の強い数）＋９９９９＝（５桁の弱い数）＋（４桁の弱い数）
が成り立ちます。
（５桁の弱い数）＋（４桁の弱い数）として表せる整数は、一、十、百、千の位が２以上８以下であり、万の位が１以上４以下の整数すべてであるから、
７×７×７×７×４＝９６０４個あります。
よって（５桁の弱い数）－（４桁の強い数）で表される数も、同じく９６０４個あります。

【問題５】
「４５分後も２桁の数 A でちょうどわり切れた」とあることから、４５の約数で２桁の数である１５と４５に注目してみます。
例えば７時０５分の表す数７０５と、その４５分後の７時５０分の表す数７５０は１５でわり切れますが、次の４５分後の８時３５分の表す数８３５は１５でわり切れません。
また例えば７時２０分の表す数７２０は４５でわり切れますが、その４５分後の８時０５分の表す数８０５は４５でわり切れません。
このように、「時間」の部分が１だけ大きくなると、１５と４５ではわり切れなくなってしまいます。それは、時刻の表す数が４５ではなく４５＋４０＝８５だけ大きくなるからです。
よってＡには、８５の約数で２桁の数である１７か８５が入ると考えられます。
ピーターくんが午前７時ちょうどに起きて、しばらくしてこの日はじめてこの時計を見たことから、７００から７５９までで１７の倍数または８５の倍数を探してみます。すると、１７の倍数として７１４、７３１、７４８の３つが見つかりますが、８５の倍数はありません。
この３つのなかで、３回目の４５分後の時刻が表す数までは１７でわり切れるが、４回目の４５分後の時刻が表す数が１７でわり切れないものは、７４８のみです。
よって考えられる最も早い時刻は０７：４８で、このときＡは１７です。

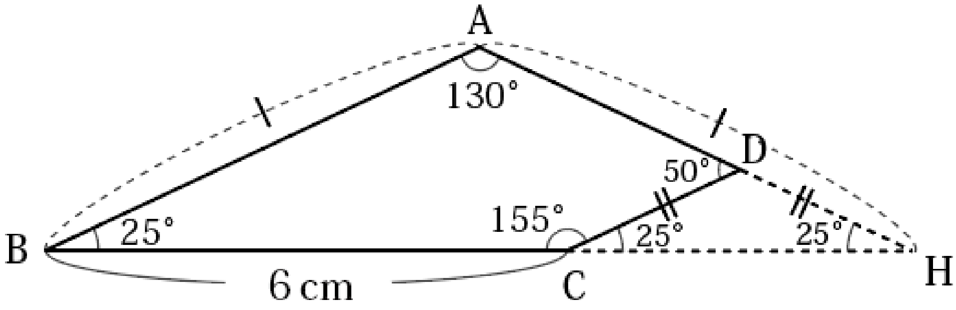
※７４８→８３３→９１８→１００３→１０４８×、のようになります。

作問者より一言
「デジタル時計の表示に限らず、日付、車のナンバー、電話番号など、身のまわりには４桁の数があふれています。デジタル時計の表示を４桁の数とみなすと、1259 の次が 1300 にとびます。面白い!!というのがきっかけです。」

【問題６】

角Ｄは３６０－（２５＋１５５＋１３０）＝５０°、角Ｇは１８０－（２０＋１１０）＝５０°です。

まず、四角形 ABCD の辺の長さについて考えます。BC と AD を延長し、交点を H とします。



角 DCH＝角 DHC＝２５°ですから、三角形 DCH は二等辺三角形です。

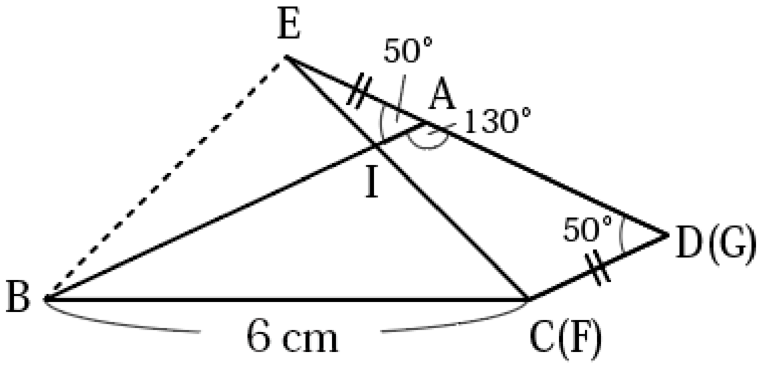
よって DC＝DH … ① と分かります。

また角 ABH＝角 AHB＝２５°ですから、三角形 ABH も二等辺三角形です。

よって AB＝AH … ② と分かります。

①、②より AB＝AD＋DC … ③ であることが分かります。

ここで三角形 EFG を、CD が FG に、角 D が角 G に重なるようにおきます。



AB＝EG であり、上の図のように ED＝EG なので、AB=ED となります。

また③より EG＝AB＝AD＋DC ですから、EA＝DC となります。

よって三角形 BEA と三角形 ECD は合同と分かります。

よって角ＢＥＡ＝１１０°、ＢＥ＝ECとなります。

角ＢＥＣ＝１１０－２０＝９０°です。よって三角形ＢＥＣは直角二等辺三角形となります。

さてＡＢとＥＣの交点をＩとすると、

求める四角形ＡＢＣＤの面積＝三角形 IBC＋三角形 ECD－三角形ＥＩＡ

＝三角形ＩＢＣ＋三角形 BEA－三角形ＥＩＡ

＝三角形ＢＥＣ

ですから、答えは６×６÷４＝９cm^{2}となります。

【問題７】
自分以外の参加者のうち４人と１回ずつ握手するためには、最低でも１＋４＝５人が必要です。参加者が合計５人と６人のときに、試してみます、
１）５人のとき
参加者をア、イ、ウ、エ、オとします。アはイウエオと、イはアウエオと、…のように、握手の方法は一通りに定まります。

握手する人

ア-		イ	ウ	エ	オ
イ-	ア		ウ	エ	オ
ウ-	ア	イ		エ	オ
エ-	ア	イ	ウ		オ
オ-	ア	イ	ウ	エ	

このとき、どの３人に注目しても、その３人の間で行われた握手の回数は３回です。よって５人は答えです。

2)６人のとき
参加者をア、イ、ウ、エ、オ、カとします。対称性より、アはイウエオと握手したとして差し支えありません。このときカが握手できるのはイウエオのみになり、カの握手の方法も決まります。
ここまでをまとめると下のようになります。

握手する人

ア-		イ	ウ	エ	オ	
イ-	ア					カ
ウ-	ア					カ
エ-	ア					カ
オ-	ア					カ
カ-		イ	ウ	エ	オ	

次にイについて考えます。ウエと握手したとして差し支えありません。するとオもウエと、ウとエはオと握手するしかありません。
ここまでをまとめると下のようになります。

握手する人

ア-		イ	ウ	エ	オ	
イ-	ア		ウ	エ		カ
ウ-	ア	イ			オ	カ
エ-	ア	イ			オ	カ
オ-	ア		ウ	エ		カ
カ-		イ	ウ	エ	オ	

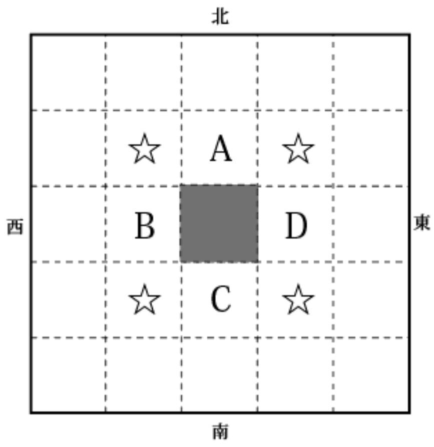
このとき、どの３人に注目しても、その３人の間で行われた握手の回数は３回または２回です。よって６人は答えです。

一般的に考えます。
参加者の合計が６人以上のとき、ある人に注目すると、その人と握手しない人が必ず存在します（例えば６人のときのアカやイオやウエ)。
参加者全員を、握手をしない人でグループ分けすると、対称性より
・グループの中に入る人数はすべて等しい
・自分の入らないグループの人と合計４回握手をする
・自分の入らないグループに入る人は４人
となるとき、どの３人に注目しても、その３人の間で行われた握手の回数は１回ではありません。
つまりグループに入る人数をＸ人、全グループ数をＹ個とすると、
Ｘ×（Ｙ－１）＝４となります。
このとき（Ｘ、Ｙ－１）＝（１、４）（２、２）（４、１）となりますから、
（Ｘ、Ｙ）＝（１、５）（２、３）（４、２）となります。
それぞれに対応する参加者の合計は、５、６、８人となります。
（参加者の合計が６人以上で考えましたが、５人も答えになることは示されています)

作問者より一言
「AB と BC が握手をしていなかったら、CA も握手をしていないことになります。それはグラフ理論の言葉にすれば“４正則な完全多部グラフの頂点数として取りうる値をすべて答えよ”という問いになるでしょうか。そのあたりから考えた問題です。」

【問題８】

右の図のように、☆のついた４つの正方形を覆うように長方形の板４枚を重ならないで敷く方法を考えます。



１つの☆につき敷き方は４通りあるので、重なる場合も含めて考えると、４枚の敷き方は

４×４×４×４＝２５６通りあります（ただし重なる場合について、長方形の板の上下は無視します）。

重なる場合、右の図のように A、B、C、D を考えると、次の６通りの重なり方が考えられます。

①A と C で重なる

②B と D で重なる

③A のみで重なる

④B のみで重なる

⑤C のみで重なる

⑥D のみで重なる

①と②の場合、板の敷き方はそれぞれ１通りずつです。

③の場合、他の２枚の敷き方は４×４＝１６通りありますが、このうち１通りは C で重なってしまうので、１６－１＝１５通りとなります。

同様にして④⑤⑥も１５通りずつです。

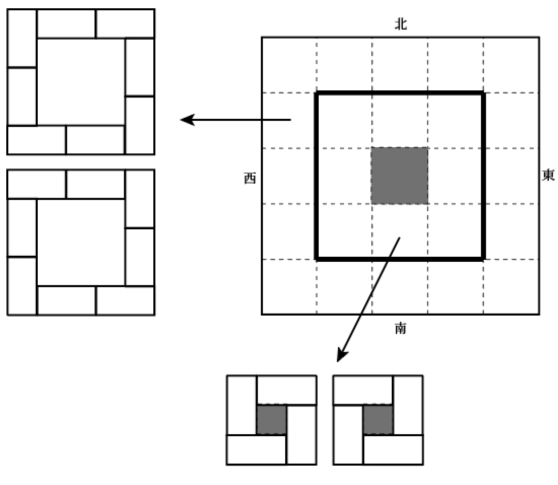
よって、☆のついた４つの正方形を覆うように長方形の板４枚を重ならないで敷く方法は

２５６－（１×２＋１５×４）＝１９４通りとなります。

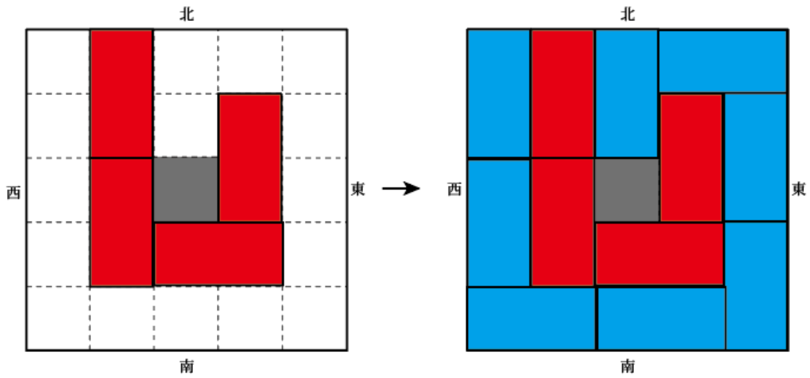
この１９４通りのうち、

A)　部屋の壁際の１６個の正方形を覆わないような敷き方は、右のように２通りあります。

またそれぞれについて、残りの長方形の板８枚の敷き方は、右のように２通りあります。



B)　部屋の壁際の１６個の正方形を１つでも覆うような敷き方をすると、長方形の板４枚の敷き方１通りにつき、残りの長方形の板８枚の敷き方は１通りに定まります。



※例えば左のように赤い長方形４枚を敷くと、残りは青い長方形のように敷くしかない。

よって求める敷き方の数は、２×２＋（１９４－２）×１＝１９６通りとなります。