

問題 1

- (1) $2021 = 45^2 - 2^2 = 47 \times 43$ なので、11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 の 11 個の 2 桁の素数の中から異なる 2 つを選びかけて得られる $\frac{11 \times 10}{2} = 55$ 個の整数はどれも 2021 以下である。
- $53 \times 37 = 45^2 - 8^2 < 2021$ より、11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 のどれかと 53 をかけて得られる 8 個の整数はどれも 2021 以下である。
- $59 \times 31 = 45^2 - 14^2 < 2021$ より、11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 のどれかと 59 をかけて得られる 7 個の整数はどれも 2021 以下である。
- $61 \times 29 = 45^2 - 16^2 < 2021$ より、11, 13, 17, 19, 23, 29 のどれかと 61 をかけて得られる 6 個の整数はどれも 2021 以下である。
- また、 $23 \times 83 = 1909 < 2020$ より、11, 13, 17, 19, 23 の中から 1 つ、67, 71, 73, 79, 83 の中からもう 1 つ選んでかけて得られる $5 \times 5 = 25$ 個の整数はどれも 2021 以下である。
- 以上の $55 + 8 + 7 + 6 + 25 = 101$ 個の整数は、異なる 2 つの 2 桁の素数をかけて得られる 2021 以下の整数なので、問題文は 正しい。

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 1^2 + 1 = 1 \times 2 \\ 2^2 + 1 = 1 \times 5 \\ 5^2 + 1 = 2 \times 13 \\ 13^2 + 1 = 5 \times 34 \\ 34^2 + 1 = 13 \times 89 \\ 89^2 + 1 = 34 \times 233 \end{array} \right. \quad \text{より、条件を満たす整数 } x, y \text{ の組として、}$$

$(x, y) = (1, 2), (2, 5), (5, 13), (13, 34), (34, 89)$ が見つかる。

- (3) 以下では、正の整数に対して、その 1, 10, 100, 1000, $\dots$ の位の数を $f(1), f(2), f(3), f(4), \dots$ と表すことにする。
- $99 = 11 \times 9$, $9999 = 11 \times 909$, $999999 = 11 \times 90909$, $\dots$ のように、9 が偶数個並ぶ数はどれも 11 の倍数であり、
- $1001 = 11 \times 91$, $100001 = 11 \times 9091$, $10000001 = 11 \times 909091$, $\dots$ のように、0 が偶数個並び両端が 1 である数はどれも 11 の倍数である。
- よって、どんな正の整数 N に対しても、 $f(1), f(2), f(3), \dots$ を足す引く交互にして得られる数 $K = f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots$ と $N = f(1) + 10f(2) + 100f(3) + 1000f(4) + \dots$ の差は 11 の倍数となる。
- 従って、一般に、 N が 11 の倍数になるのは、 $K = f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots$ が 11 の倍数のとき（のみ）である。
- さて、1 がちょうど 2021 個使われている正の整数で最も小さいのは、1 が 2021 個並ぶ 2021 桁の数だが、これは $K = 1$ であり、11 の倍数でない。次に小さいのは、1 が 2021 個、1 でない 1 桁の数 b が 1 個並ぶ 2022 桁の数だが、これは

$K = b - 1$ か $K = -b + 1$ のどちらかであり、いずれの場合も K は 11 の倍数でない。次に小さいのは、1 が 2021 個、1 でない 1 桁の数 b, c が 1 個ずつ並ぶ 2023 桁の数である。 b, c ともに $f(\text{奇数})$ の場合は $K = b + c - 1$ であり、これが 11 の倍数となるのは、 $(b, c) = (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3)$ のとき。 b, c ともに $f(\text{偶数})$ の場合は $K = 3 - b - c$ であり、これが 11 の倍数となるのは、 $(b, c) = (0, 3), (3, 0), (5, 9), (6, 8), (7, 7), (8, 6), (9, 5)$ のとき。 $b = f(\text{奇数}), c = f(\text{偶数})$ の場合は $K = b - c + 1$ であり、これが 11 の倍数となるのは、 $(b, c) = (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9)$ のとき。

以上からわかるように、今考えている 2023 桁の 11 の倍数を小さい順に並べたときの 1 番目から 1010 番目の数は $f(2022) = 0, f(2i) = 3$ ($i = 1, 2, \dots, 1010$) なるもの、1011 番目から 2019 番目の数は $f(2020) = 0, f(2i) = 3$ ($i = 1, 2, \dots, 1009$) なるもの、そして、2020 番目の数は $f(2018) = 0, f(2) = 3$ なるもの、2021 番目の数は $f(2018) = 0, f(4) = 3$ なるものである。よって、この 2021 番目の数の各位の和は $0 + 3 + 1 \times 2021 = \boxed{2024}$ である。

- (4) 1 以上 100 以下の整数の正の約数になりうる整数は 1 以上 100 以下の整数である。

1 以上 100 以下の整数 k に対し、 k を正の約数にもつような 1 以上 100 以下の整数の個数は、 $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ である。ここに、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すことに

する。よって、求めるべき S の値は、 $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ を 1 以上 100 以下の全ての整数 k に対し足し合わせたものに等しい。 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ のときの $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ の値は 100, 50, 33, 25, 20, 16, 14, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 7, 6, 6 であり、

$17 \leq k \leq 20$ のときの $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ の値は 5、

$21 \leq k \leq 25$ のときの $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ の値は 4、

$26 \leq k \leq 33$ のときの $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ の値は 3、

$34 \leq k \leq 50$ のときの $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ の値は 2、

$51 \leq k \leq 100$ のときの $\left\lceil \frac{100}{k} \right\rceil$ の値は 1 なので、

以上を合計して、

$$S = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 7 + 6 + 6 \\ + 5 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 8 + 2 \times 17 + 1 \times 50$$

$$= \boxed{482}$$

となる。

- (5) $\angle CAP = a$, $\angle DAP = 2a$ とする。右図のように点 Q を、BP の延長上に $\angle PAQ = a$ となるようにとると、

$\angle PQA = \angle DAQ = \angle DAP - \angle PAQ = a$ である。

$\angle PAQ = \angle PQA = a$ より、 $PQ = AP = 1 + x$ である。

また、 $\angle APC = \angle PAQ + \angle PQA = 2a$,

$\angle QAC = \angle PAQ + \angle CAP = 2a$ より、 $\angle APC = \angle QAC$ なので、三角形 APC と三角形 QAC は相似である。よって、 $CP : AC = CA : QC$ より、 $CP = y$ とおくと、 $AC^2 = CP \times QC = CP \times (PQ + CP) = y(1 + x + y)$ である。

一方で、三平方の定理より、 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + x^2$ なので、

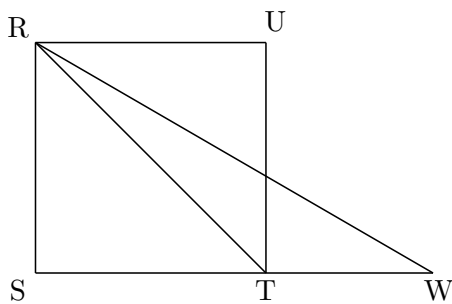
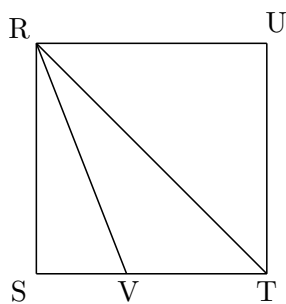
$y(1 + x + y) = 1 + x^2 \cdots \textcircled{1}$ を得る。再び三平方の定理より、 $AB^2 + BP^2 = AP^2$ 、すなわち、 $AB^2 + (BC + CP)^2 = AP^2$ なので、 $1^2 + (x + y)^2 = (1 + x)^2 \cdots \textcircled{2}$ であり、これを両辺展開し整理すると、 $y(2x + y) = 2x \cdots \textcircled{2}'$ を得る。

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}'$ を辺々引くと、 $y(1 - x) = (1 - x)^2$ となり、 $x \neq 1$ ならば、 $y = 1 - x \cdots \textcircled{3}$ である。 $\textcircled{3}$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、 $(1 + x)^2 = 2$ となり、これと $1 + x > 0$ より、 $1 + x = \sqrt{2}$ となる。以上より、 $x = \sqrt{2} - 1$ と $x = 1$ 以外はない。

ところで、一辺の長さが 1 の正方形 RSTU を考え、下図のように、辺 ST 上、および延長上に点 V, W を、 $\angle TRV = 22.5^\circ$, $\angle TRW = 15^\circ$ となるようにとると、 $\angle TRV = \angle SRV$ より、 $SV : VT = RS : RT = 1 : \sqrt{2}$ なので、

$$SV = ST \times \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$$

これより、 $RT = \sqrt{2} = 1 + SV$ であり、これと $\angle URT = 2\angle VRT$ より、 $x = \sqrt{2} - 1$ は条件を満たす。また、 $\angle SRW = 60^\circ$ より、 $RW = 2RS = 2 = 1 + ST$ なので、これと $\angle URW = 2\angle TRW$ より、 $x = 1$ も条件を満たす。



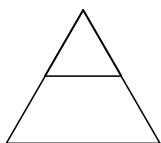
以上より、 x としてありえるのは、 $x = \sqrt{2} - 1, 1$

問題 2

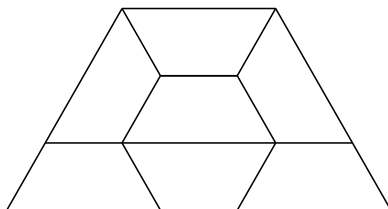
1 以上 10000 以下の整数 k, m に対し、 k^4 と m^4 を 10001 で割った余りが一致しているならば、 $k^4 - m^4$ は 10001 の倍数なので、 $k^8 - m^8 = (k^4 + m^4)(k^4 - m^4)$ も 10001 の倍数であり、 k^8 と m^8 を 10001 で割った余りも一致している。また、 $10^4 - 1^4 = 9999$ は 10001 の倍数ではないが、 $10^8 - 1^8 = (10^4 + 1^4)(10^4 - 1^4) = 10001 \times 9999$ は 10001 の倍数なので、 1^4 と 10^4 を 10001 で割った余りは一致しないが、 1^8 と 10^8 を 10001 で割った余りは一致している。以上から、 $A > B$ である。

問題 3

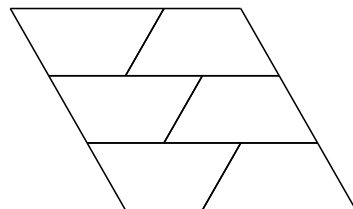
- (1) 0 以上の整数 n に対し、「一辺の長さが $3n + 2$ の正三角形はタイル U 何枚かと一辺の長さが 1 の正三角形形のタイル (S とする) 1 枚で隙間なく重なりなく覆うことができる」…♠ ことを示す。



(図 1)



(図 2)

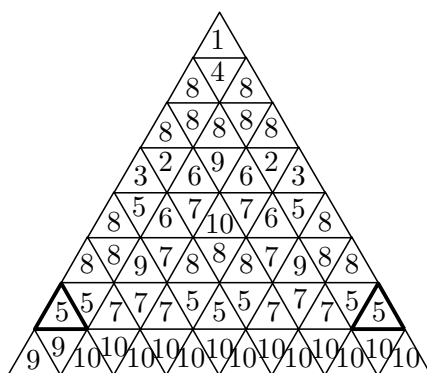


(図 3)

まず、 $n = 0$ のときの ♠ は図 1 のように S と U をくっつけければ正しいとわかる。次に、図 1 の下に図 2 のようにタイル U を敷き詰めた図形をくっつけることで、 $n = 1$ のときの ♠ も正しいとわかる。そのようにして得られる図形の下に、図 2 の右隣に図 3 をくっつけた図形をくっつけることで、 $n = 2$ のときの ♠ も正しいとわかる。このようにして、一般に、 $n = k (\geq 0)$ のときの ♠ が正しいとわかっているならば、そのとき得られている図形の下に、図 2 の右隣に図 3 を k 個くっつけた図形をくっつけることで、 $n = k + 1$ のときの ♠ も正しいことがわかる。従って、どんな 0 以上の整数 n に対しても ♠ は正しいので、 T も S と U で敷き詰めることが可能である。なお、一辺の長さが 1 の正三角形を 2021^2 個つなげたものが T で、3 個つなげたものが U なので、 T を S と U で敷き詰めたとき、用いる U の枚数は、 $\frac{2021^2 - 1}{3}$ 枚である。

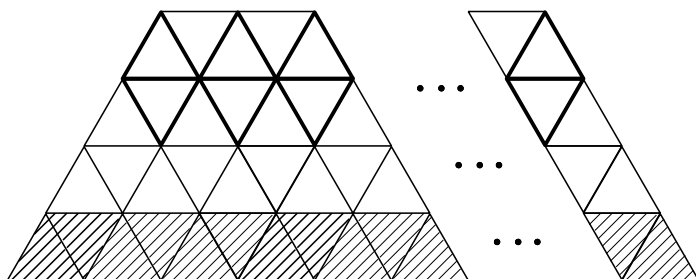
- (2) 8 以上の整数 m に対し、「一辺の長さが m の正三角形を、一辺の長さが 1 の小正三角形 m^2 個に分け、それぞれに色を付けるとき、 V をどうおいても斜線の 2 箇所が同色であるならば、 m^2 個の小正三角形はすべて同色である」…♡ ことを示せば十分である。まずは、 $m = 8$ のときの ♡ が正しいことを示す。

右図の小三角形2は、小三角形1とVの斜線で同時に覆われるので、同じ色である。小三角形3は、ある小三角形2とVの斜線で同時に覆われるので、同じ色であり、同じ理由で、小三角形4は小三角形3と同じ色なので、結局、小三角形1,2,3,4はすべて同じ色である。これと同じことを繰り返せば、小三角形5は小三角形3と同じ色、小三角形6は小三角形5と同じ色、小三角形7は小三角形6と同じ色であることがわかるので、小三角形1~7はすべて同じ色である。



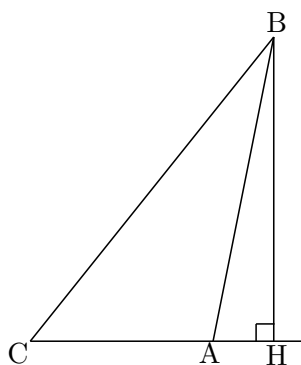
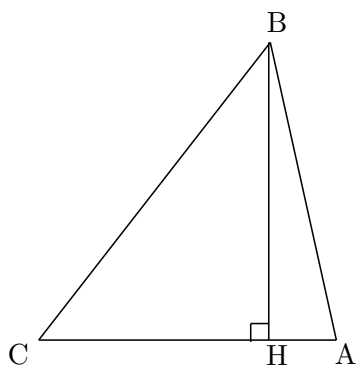
また、太線の小三角形からスタートして、以上と同じことを繰り返せば、小三角形8も同じ色であることがわかり、1,2,3,4が同じ色であるのと同じ理由で、小三角形9も同じ色である。最後に、一番左下の小三角形からスタートして、以上と同じことを繰り返せば、小三角形10も同じ色であることがわかるので、結局、小三角形1~10はすべて同じ色である。よって、 $m = 8$ のときの♡は正しい。

また、下図の太線の小正三角形がすべて同じ色ならば、それとVの斜線で同時に覆われる下図の一番下の段の小正三角形はすべて太線の小正三角形と同じ色である。よって、 $m = 8$ のときの♡が正しいことから、 $m = 9$ のときの♡も正しいとわかる。このように、一般に、 $m = k (\geq 8)$ のときの♡が正しいとわかっていれば、 $m = k + 1$ のときの♡も正しいとわかる。



従って、どんな8以上の整数 m に対しても♡が正しいことが示せた。

問題 4



三角形 ABC の 3 辺のうち長さが最大のものは BC なので、3 つの内角のうち最大のものは $\angle BAC$ である。よって、 $\angle ACB$ は 90° より小さいので、B から直線 AC に下ろした垂線の足を H とすると、H は辺 AC 上か、または、辺 AC の A 側への延長上にある。

三角形 BCH に三平方の定理を用いて、

$$BH^2 = BC^2 - CH^2 \dots \textcircled{1}$$

三角形 ABH に三平方の定理を用いて、

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = AB^2 - |CH - AC|^2 \dots \textcircled{2}$$

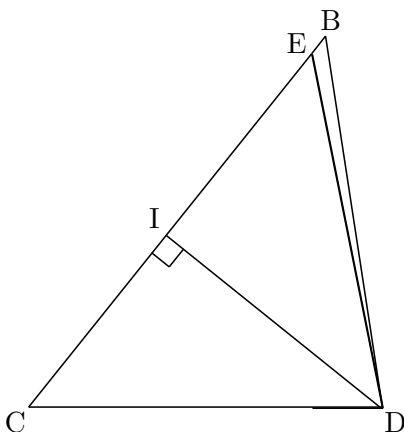
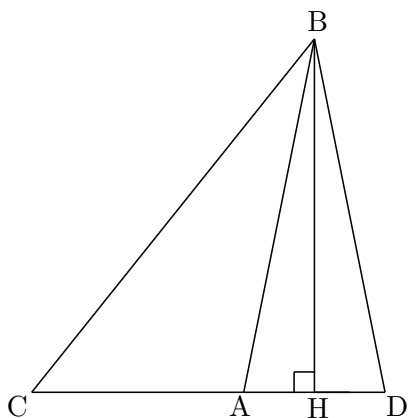
①, ② より、 $BC^2 - CH^2 = AB^2 - |CH - AC|^2$ であり、これより、

$$24^2 - CH^2 = 20^2 - (CH - 11)^2$$

$$24^2 - CH^2 = 20^2 - CH^2 + 22 \times CH - 11^2$$

$$CH = \frac{24^2 - 20^2 + 11^2}{22} = \frac{27}{2}$$

を得る。 $CH > AC$ より、C, A, H はこの順に並ぶとわかる。



そこで、直線 BH に関して A と対称な点を D とすると、

$\angle BDC = \angle BAD = \angle ABC + \angle ACB = x^\circ + y^\circ$ より、

$$\angle BDC + \angle BCD + (x^\circ + y^\circ) + y^\circ = x^\circ + 2y^\circ \dots \textcircled{3}$$

また、D から直線 BC に下ろした垂線の足を I とすると、三角形 BCH と三角形 DCI は相似である。 $BC : CH = 24 : \frac{27}{2} = 16 : 9$ なので、三平方の定理より、

$$DC : CI : DI = BC : CH : BH = 16 : 9 : \sqrt{16^2 - 9^2} = 16 : 9 : 5\sqrt{7}$$

$$DH = AH = CH - AC = \frac{27}{2} - 11 = \frac{5}{2} \text{ より、} CD = AC + AH + DH = 11 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 16$$

なので、 $CI = 9$, $DI = 5\sqrt{7}$ である。 $CI < BC$ より、C,I,Bはこの順に並び、

$BI = BC - CI = 24 - 9 = 15 = 5\sqrt{9} > 5\sqrt{7} = DI$ である。従って、線分 BI 上に点 E を $EI = DI$ となるようにとれて、 $\angle CBD = \angle DEI - \angle BDE < \angle DEI = 45^\circ$ とわかる。

これと ③ より、 $x^\circ + 2y^\circ = \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ - \angle CBD > 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

すなわち、 $\boxed{x^\circ + 2y^\circ > 135^\circ}$ を得る。