

【問題 1】 (40 点)

以下の問いについて、結果のみを答えよ.

- (1) 2021 のように、異なる 2 つの 2 桁の素数の積で表わせる正の整数は、2021 以下の範囲に 100 個以上ある. 正しいか、誤りかを答えよ.
- (2) 次の条件をともに満たす整数 x, y の組を 5 組答えよ.
(条件)
- ・ $1 \leq x < y \leq 100$
 - ・ $x^2 + 1$ が y の倍数であり, $y^2 + 1$ が x の倍数である.
- (3) 例えば 121 は 1 という数字が丁度 2 つ, 11121 は 1 という数字が丁度 4 つ用いられている正の整数である.
1 という数字が丁度 2021 個用いられている, 11 の倍数である正の整数を小さい順に並べてゆくときの, 2021 番目の整数を A とする. A の各位の和を求めよ.
- (4) n を正の整数とし, n の正の約数の個数を a_n と表す. 例えば, $a_1 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3$ である. 100 個の整数の和 $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$ を求めよ.
- (5) $AB = 1, BC = x$ の長方形 $ABCD$ の, 辺 BC の延長線上に点 P を, 3 点 B, C, P がこの順に並び, かつ $\angle DAP = 2\angle CAP$ となるようにとったところ, $AP = 1 + x$ となったという. x として考えられるものをすべて答えよ.

【問題2】 （20点）

$1^4, 2^4, 3^4, \dots, 10000^4$ の 10000 個の整数を 10001 で割った余りとして登場する数の種類を A 通りとし、 $1^8, 2^8, 3^8, \dots, 10000^8$ の 10000 個の整数を 10001 で割った余りとして登場する数の種類を B 通りとする。

A と B の大小を調べよ。即ち、両者が等しくないならばどちらが大きいかを、等しくなるならばその旨を答え、その理由も述べよ。

【問題3】 (20点)

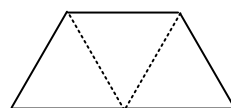
一辺の長さが2021である正三角形 T がある.

- (1) T を, 一辺の長さが1である正三角形3つをつなげた

右のようなタイル U $\frac{2021^2-1}{3}$ 枚と, 一辺の長さが1で

ある正三角形形状のタイル1枚で, 隙間なく覆うことは可能だろうか.

タイル U は回転させたり裏返したりして用いてもよい. 理由をつけて答えよ.



タイル U

- (2) T を, 一辺の長さが1である正三角形 2021^2 個に分け, それぞれの小正三角形一つずつを何色かで塗る.

一辺の長さが1である正三角形6つをつなげた

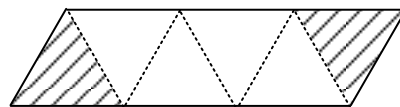
右のようなタイル V を, 回転させたり裏返したり

もしながら, 小正三角形6つをきれいに覆うように

どのようにおいても, タイル V の斜線の位置にある

部分が覆う小正三角形2つの色は同じであるという.

このとき, 2021^2 個の小正三角形はすべて同じ色で塗られていることを証明せよ.



タイル V

【問題4】 （20点）

$AB=20$, $BC=24$, $CA=11$ の三角形 ABC において, $\angle ABC = x^\circ$, $\angle ACB = y^\circ$ とおく.

$x^\circ + 2y^\circ$ と 135° の大小を調べよ. 即ち, 両者が等しくないならばどちらが大きいかを, 等しくなるならばその旨を答え, その理由も述べよ.