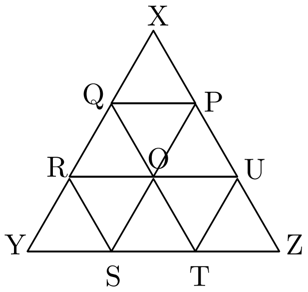
広中杯 2026Jr トライアル　解答

【問題 1】

以下の図のように点に文字をおく。X, Y, Z のうち異なる 2 つを訪ねるには、間に 2 回の散歩を挟む必要があり、例えば、「P, X, Q $\to$ Q, R, S $\to$ S, T, U $\to$ R, Y, S $\to$ S, T, U $\to$ U, P, Q $\to$ T, Z, U」の順で公園を訪れたとき、1, 4, 7 回目の散歩で X, Y, Z を訪れたうえ、条件を満たすことができるので、求める回数の最小値は $\boxed{7\text{ 回}}$



【問題 2】

2^{13}は 4 の倍数であり、$1, 2, \ldots, 12$ の中に奇数と偶数は 6 個ずつあるので、式の値は常に偶数である。

さらに、3 の左にある空欄に当てはめたもののみが異なる 2 つの式をペアにして考えると、この 2 式の値の差は 6 なので、一方が 4 の倍数でもう一方が 4 で割って 2 余る数となる。

よって、$2^{11} = 2048$ 通りの記号の当てはめ方のうち、ちょうど半分が式の値が 4 の倍数のものとわかるので、求める場合の数は、$2048 \div 2 = \boxed{1024\text{ 通り}}$

【問題 3】

線で結ばれた○に書かれた数の積の和を S とする。

1 の両隣が 2 と 3 のとき、S が最大となるのは、1, 2, 4, 6, 5, 3 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 82$
1 の両隣が 2 と 4 のとき、S が最大となるのは、1, 2, 3, 5, 6, 4 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 81$
1 の両隣が 2 と 5 のとき、S が最大となるのは、1, 2, 3, 4, 6, 5 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 79$
1 の両隣が 2 と 6 のとき、S が最大となるのは、1, 2, 3, 4, 5, 6 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 76$
1 の両隣が 3 と 4 のとき、S が最大となるのは、1, 3, 2, 5, 6, 4 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 77$
1 の両隣が 3 と 5 のとき、S が最大となるのは、1, 3, 2, 4, 6, 5 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 76$
1 の両隣が 3 と 6 のとき、S が最大となるのは、1, 3, 2, 4, 5, 6 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 73$
1 の両隣が 4 と 5 のとき、S が最大となるのは、1, 4, 2, 3, 6, 5 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 71$
1 の両隣が 4 と 6 のとき、S が最大となるのは、1, 4, 2, 3, 5, 6 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 69$
1 の両隣が 5 と 6 のとき、S が最大となるのは、1, 5, 3, 2, 4, 6 の順で数を入れたときであり、このとき、$S = 64$
以上より、S の最大値は $\boxed{82}$

【問題 4】

途中で「1, 3, 4」が表示されるのは、最初の 5 回で B を 3 回、C を 2 回押し、最後の 4 回で A を 3 回、B を 1 回押すときなので、押し方は${}_5\mathrm{C}_2 \times 4 = 10 \times 4 = 40$ 通り。

途中で「1, 4, 3」,「3, 1, 4」,「3, 4, 1」,「4, 1, 3」,「4, 3, 1」が表示されるものについても同様である。

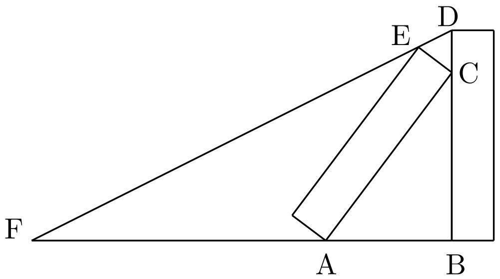
途中で「2, 2, 3」が表示されるのは、最初の 4 回で A を 1 回、B を 1 回、C を 2 回押し、最後の 4 回で A を 2 回、B を 2 回、C を 1 回押すときなので、押し方は $(4 \times 3) \times (5 \times {}_4\mathrm{C}_2) = 12 \times 5 \times 6 = 360$ 通り。

途中で「2, 3, 2」,「3, 2, 2」が表示されるものについても同様である。

以上より、求める場合の数は、$40 \times 6 + 360 \times 3 = \boxed{1320\text{ 通り}}$

【問題 5】

以下の図のように点を文字でおき、E から BD に下ろした垂線の足を H とする。$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{CHE} = 90^\circ$であり、
$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{HCE} + \angle \mathrm{ACE} - \angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{HCE}$ なので、$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{CHE}$
よって、$\mathrm{EH} = \dfrac{4}{5}, \mathrm{HC} = \dfrac{3}{5}$であり、$\mathrm{DH} = \mathrm{BD} - \mathrm{HC} - \mathrm{CB} = 5 - \dfrac{3}{5} - 4 = \dfrac{2}{5}$
よって、$\mathrm{EH} \mathbin{/\!/} \mathrm{FB}$ より、$\mathrm{DH} : \mathrm{DB} = \mathrm{EH} : \mathrm{FB}$ なので、$\dfrac{2}{5} : 5 = \dfrac{4}{5} : (x+3)$ であり、$x + 3 = 10$ より、$x = \boxed{7}$

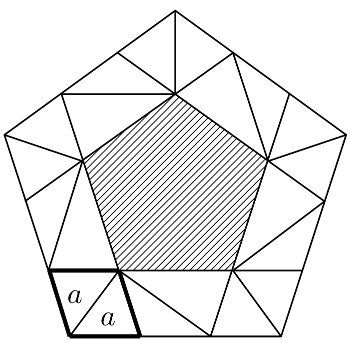


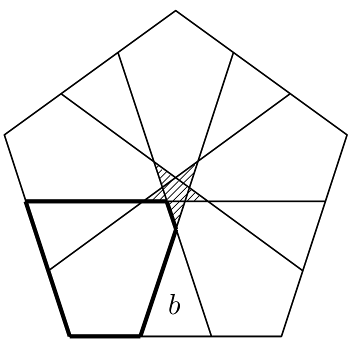
【問題 6】

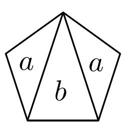
「$X \to Y$」で「X が『Y はうそつきである』と言う」を表すとする。$X \to Y$ が成り立つのは X, Y のうち、一方が正直者で一方がうそつきのときのみである。よって、$X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n \to X_1$は n が奇数のとき成立せず、n が偶数のときは、$X_1, X_2, \ldots, X_n$が正直者とうそつきが交互になっているときに成り立つ。
以下、P, Q, R, S, T, U を A, B, C, D, E, F の並べ替えとする。
「$P \to Q \to R \to S \to T \to U \to P$」となるのは、$5! = 120$ 通り。
「$P \to Q \to R \to S \to P$, $T \to U \to T$」となるのは、${}_6\mathrm{C}_2 \times 3! = 15 \times 6 = 90$ 通り。
「$P \to Q \to P$, $R \to S \to R$, $T \to U \to T$」となるのは、${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \div 3! = 15 \times 6 \div 6 = 15$ 通り。
よって、求める場合の数は、$120 + 90 + 15 =$ $\boxed{225 \text{ 通り}}$

【問題 7】

二辺の長さが 1 で間の角が 72°または 108°の三角形の面積を a とし、2 つの内角が 72°で間の辺の長さが 1 の三角形の面積を b とする。右下の図のように、一辺 1 の正五角形の面積は $2a + b$ となるので、一辺 3 の正五角形の面積 S は $S = 9(2a + b) = 18a + 9b$ である。
1 つめの図より、面積 a の三角形 15 個と面積 b の三角形 5 個と面積 A の正五角形 A で面積 S の正五角形が作られるので、$S = 15a + 5b + A$ より、$A = S - (15a + 5b) = (18a + 9b) - (15a + 5b) = 3a + 4b$
2 つめの図において、太線で囲まれた部分を D とし、D の面積を T とする。D は、1 つめの図において、太線で囲まれた部分を 2 倍に相似拡大した図形から面積 b の三角形を除いたものなので、$T = 2a \times 4 - b = 8b$ である。
よって、面積 T の五角形 5 個と面積 B の星形の図形で面積 S の正五角形が作られるので、$S = 5T + B$ より、
$B = S - 5T = 18a + 9b - 5(8a - b) = 14b - 22a$
よって、$10A - B = 10(3a + 4b) - (14b - 22a) = 52a + 26b$ となり、これは、$S = 18a + 9b$ の $\boxed{\dfrac{26}{9} \text{倍}}$

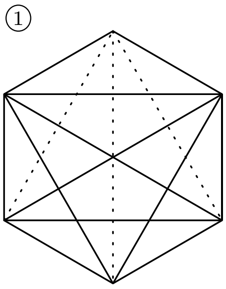


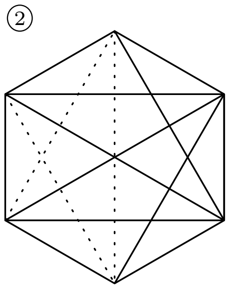


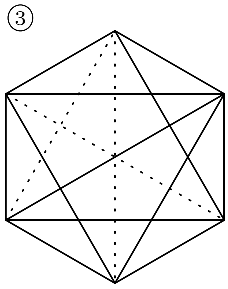


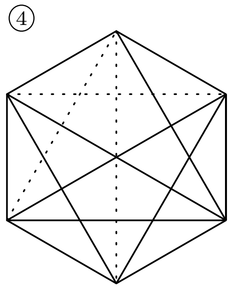
【問題 8】

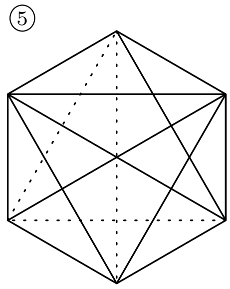
回転および裏返しで一致する線の引き方を区別すると、9 本の対角線のうち、6 本を選んで結ぶ方法は以下の 12 通りであり、このうち、12 個の領域に分かれているのは、①, ⑥, ⑦, ⑩ の $\boxed{4\text{ 通り}}$ である。

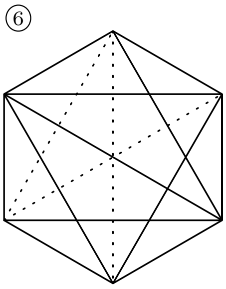
①


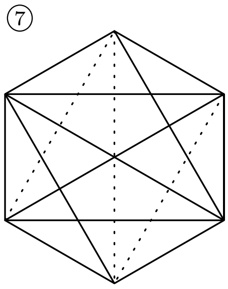
②


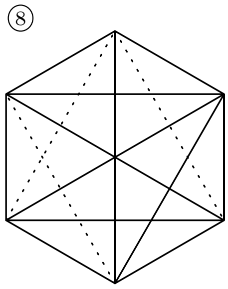
③


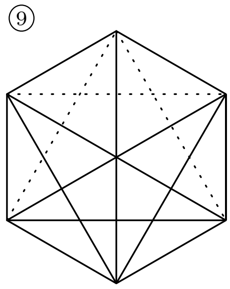
④


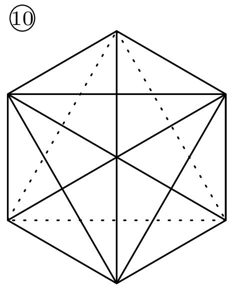
⑤


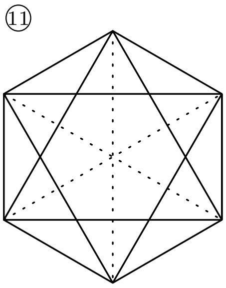
⑥


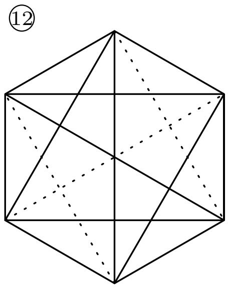
⑦


⑧


⑨


⑩


⑪


⑫


【問題 9】

$B(n) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ とおく。

$A(n) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times ((2n+1)-1)$

$= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) - 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = B(n+1) - B(n)$ より、

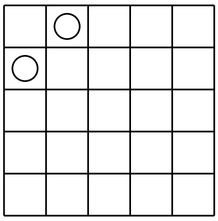
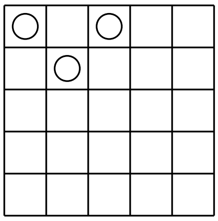
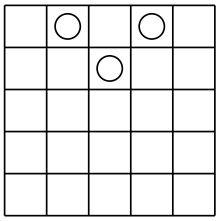
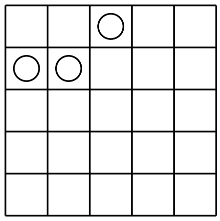
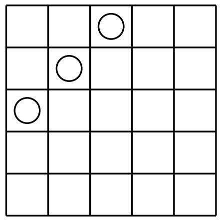
$A(1) + A(2) + \cdots + A(100) = (B(2) - B(1)) + (B(3) - B(2)) + \cdots + (B(101) - B(100)) = B(101) - B(1)$

$N = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99$ を 100 で割った余りを x とすると、$101 \times 103 \times 105 \times \cdots \times 199$ を 100 で割った余りも x であり、201 を 100 で割った余りは 1 であることを加味して、$B(101) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 199 \times 201$ を 100 で割った余りは N^2 を 100 で割った余りに一致する。N は 5 の倍数なので、N^2 は 25 の倍数である。また、4 で割って 1 余る数を 2 乗したものを 4 で割った余りは 1 であり、4 で割って 3 余る数を 2 乗したものを 4 で割った余りも 1 なので、奇数の 2 乗を 4 で割った余りは 1 であるから、N^2 を 4 で割った余りは 1 である。

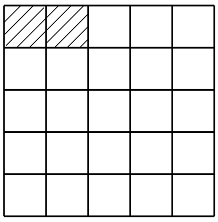
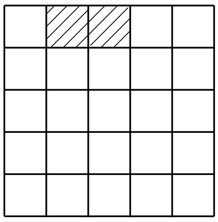
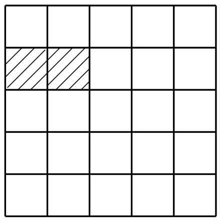
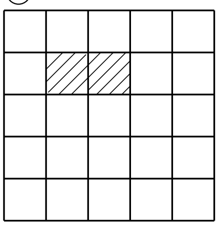
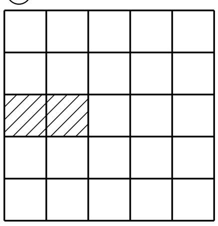
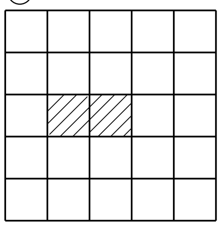
よって、N^2 を 100 で割った余りは 25 であり、$B(100)$ の下 2 桁は 25 なので、$B(100) - B(1) = B(100) - 1$ の下 2 桁は 24 であり、求める十の位は $\boxed{2}$

【問題 10】

(1) 以下の図において、〇は色が塗られていないマスを表すとする。① のとき、条件を満たす盤面は 13 通り。
この他に、条件を満たす盤面は ②, ③, ④, ⑤ の 4 通りがあるので、求める場合の数は、$\boxed{17 \text{ 通り}}$

①

②

③

④

⑤


(2) 黒で塗られた隣り合う 2 マスがどこにあるかで場合分けして考える。以下の図の ①, ②, . . . , ⑥ に対し、条件を満たす盤面の総数はそれぞれ、20, 19, 18, 17, 10, 9 なので、求める場合の数は、これらを足し合わせて、
$\boxed{93 \text{ 通り}}$

①

②

③

④

⑤

⑥


【問題 11】

B を直線 AP について対称移動させた点を X とし、F を AR を直線 AR について対称移動させた点を Y とする。
正六角形 ABCDEF の一辺の長さを x とすると、$\mathrm{AX} = \mathrm{AB} = x, \mathrm{AY} = \mathrm{AF} = x$ であり、
$\angle\mathrm{PAX} + \angle\mathrm{RAY} = \angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{RAY} = \angle\mathrm{BAF} - \angle\mathrm{PAR} = 120° - 90° = 30°$ より、
$\angle\mathrm{XAY} = \angle\mathrm{BAF} - (\angle\mathrm{PAX} + \angle\mathrm{RAY}) - (\angle\mathrm{PAB} + \angle\mathrm{RAY}) = 120° - 30° - 30° = 60°$ なので、三角形 AXYは一辺 x の正三角形である。
また、$\angle\mathrm{AXP} + \angle\mathrm{AXY} = 120° + 60° = 180°, \angle\mathrm{AYR} + \angle\mathrm{AYX} = 120° + 60° = 180°$ より、4 点 P, X, Y, R は一直線上である。
ここで、一辺 x の正三角形の面積を S とすると、正六角形 ABCDEF の面積は $6S$ となる。
一方で、$(\triangle\mathrm{ABP}) + (\triangle\mathrm{AFR}) = (\triangle\mathrm{AXP}) + (\triangle\mathrm{AYR}) = (\triangle\mathrm{APR}) - (\triangle\mathrm{AXY}) = 24 - S$ より、
(正六角形 ABCDEF) $= (\triangle\mathrm{ABP}) + (\triangle\mathrm{AFR}) +$ (長方形 APQR) $+$ (六角形 CDERQP) $= 24 - S + 48 + 19$
$= 91 - S$ となる。
以上より、$6S = 91 - S$ となり、$S = 13$ なので、正六角形 ABCDEF の面積は、$6S = \boxed{78}$