広中杯 2026 トライアル　解答

【問題 1】

$\mathrm{I}-(1)$

$A=(2-\sqrt{3})+(4-\sqrt{15})+(6-\sqrt{35}), B=(3-2\sqrt{2})+(5-2\sqrt{6})+(7-4\sqrt{3})$ とおく。

$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$とおくと、$a_n=\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ より、

$0<a_7<a_6<\cdots<a_2$であり、$\dfrac{1}{3}-a_2=\dfrac{1}{3}-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}=\sqrt{3}-\sqrt{\dfrac{25}{9}}>0$ なので、

$a_2<\dfrac{1}{3}$ より、$0<a_7<a_6<\cdots<a_2<\dfrac{1}{3}\cdots$①

$\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{35}+A=12$ は整数であり、① より、$A=a_2+a_4+a_6$は 0 と 1 の間にあるので、条件を満たす x はただ 1 つであることに注意して、$\sqrt{x}=A$ である。

また、$2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}+B=15$ は整数であり、① より、$B=a_3+a_5+a_7$は 0 と 1 の間にあるので、条件を満たす y はただ 1 つであることに注意して、$\sqrt{y}=B$ である。

①より、$a_2+a_4+a_6>a_3+a_5+a_7$なので、$A>B$ であり、$\sqrt{x}>\sqrt{y}$より、$\boxed{\text{(あ) } x>y}$ となる。

$\mathrm{I}-(2)$

求める素数を p,q とおくと、p,q は 2 でも 5 でもない素数なので、一の位は $1,3,7,9$ のいずれかであり、十の位は 0 なので、p,q を 100 で割った余りは $1,3,7,9$ のいずれかである。よって、$pq=154421$ より、p,q の積を 100 で割った余りは 21 なので、p,q を 100 で割った余りは 3 と 7 である。

よって、求める素数は正の整数 x,y を用いて $100x+3, 100y+7$ とおける。$(100x+3)(100y+7)=154421\cdots$① となり、$10000xy+700x+300y+21=154421$ より、$100xy+7x+3y=1544$

ここで、$xy=15, 7x+3y=44$ となる x,y を探すと、$(x,y)=(5,3)$ が見つかり、このとき、① が成り立つので、$154421=503\times 307$ が成り立つ。よって、求める素数は $\boxed{503, 307}$

$\mathrm{I}-(3)$

直線 BD と直線 AC の交点を H とすると、$\angle\mathrm{EDB}=\angle\mathrm{ADH}=90^\circ-\angle\mathrm{EAC}=90^\circ-\angle\mathrm{ECA}=\angle\mathrm{EBD}$ なので、$\mathrm{EB}=\mathrm{ED}=9$ となる。また、$\angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{ECA}$ より、$\mathrm{EC}=\mathrm{EA}=11$ となる。

$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BCA}, \angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CBA}$ より、$\triangle\mathrm{ABE}\backsim\triangle\mathrm{CBA}$ より、$\mathrm{AB}:\mathrm{BE}=\mathrm{CB}:\mathrm{BA}$ となる。よって、$\mathrm{AB}:9=20:\mathrm{AB}$ より、$\mathrm{AB}^2=180$ なので、$\mathrm{AB}=6\sqrt{5}$

ここで、E から BH に下ろした垂線の足を M とすると、$\mathrm{EB}=\mathrm{ED}$ より、$\mathrm{BM}=\mathrm{DM}$ であり、$\mathrm{AH}\parallel\mathrm{EM}$ より、$\mathrm{MD}:\mathrm{DH}=\mathrm{ED}:\mathrm{DA}=9:2$ なので、$\mathrm{DH}=2y$ とおくと、$\mathrm{BM}=\mathrm{DM}=9y$ となる。

よって、$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{HAD}$ より、$\mathrm{AB}:\mathrm{AH}=\mathrm{BD}:\mathrm{DH}=18y:2y=9:1$ なので、$\mathrm{AB}=6\sqrt{5}$より、$\mathrm{AH}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{180-\dfrac{20}{9}}=\dfrac{40}{3}$ となるので、$\mathrm{BD}:\mathrm{DH}=9:1$ より、$\mathrm{BD}=\dfrac{40}{3}\times\dfrac{9}{10}=\boxed{12}$

I − (4)

$B(n) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ とおく。

$A(n) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times ((2n+1)-1)$

$= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) - 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = B(n+1) - B(n)$ より、

$A(1) + A(2) + \cdots + A(100) = (B(2) - B(1)) + (B(3) - B(2)) + \cdots + (B(101) - B(100)) = B(101) - B(1)$

$N = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99$ を 100 で割った余りを x とすると、$101 \times 103 \times 105 \times \cdots \times 199$ を 100 で割った余りも x であり、201 を 100 で割った余りは 1 であることを加味して、$B(101) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 199 \times 201$ を 100 で割った余りは N^2 を 100 で割った余りに一致する。N は 5 の倍数なので、N^2 は 25 の倍数である。また、4 で割って 1 余る数を 2 乗したものを 4 で割った余りは 1 であり、4 で割って 3 余る数を 2 乗したものを 4 で割った余りも 1 なので、奇数の 2 乗を 4 で割った余りは 1 であるから、N^2 を 4 で割った余りは 1 である。

よって、N^2 を 100 で割った余りは 25 であり、$B(100)$ の下 2 桁は 25 なので、$B(100) - B(1) = B(100) - 1$ の下 2 桁は 24 であり、求める十の位は $\boxed{2}$

I − (5)

二辺の長さが 1 で間の角が 72°または 108°の三角形の面積を a とし、2 つの内角が 72°で間の辺の長さが 1 の三角形の面積を b とする。右下の図のように、一辺 1 の正五角形の面積は $2a + b$ となるので、一辺 3 の正五角形の面積 S は $S = 9(2a + b) = 18a + 9b$ である。

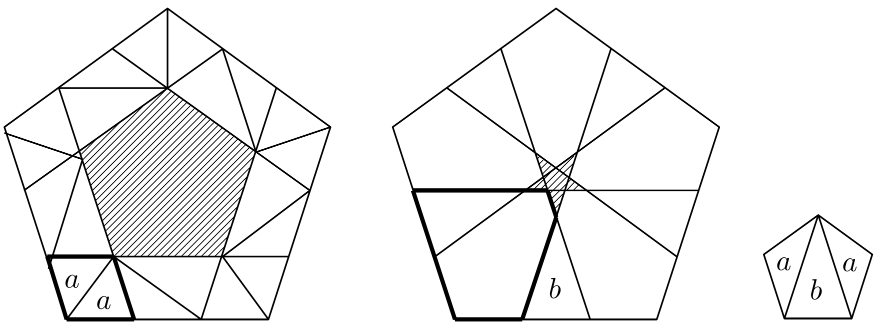
1 つめの図より、面積 a の三角形 15 個と面積 b の三角形 5 個と面積 A の正五角形 A で面積 S の正五角形が作られるので、$S = 15a + 5b + A$ より、$A = S - (15a + 5b) = (18a + 9b) - (15a + 5b) = 3a + 4b$

2 つめの図において、太線で囲まれた部分を D とし、D の面積を T とする。D は、1 つめの図において、太線で囲まれた部分を 2 倍に相似拡大した図形から面積 b の三角形を除いたものなので、$T = 2a \times 4 - b = 8b$ である。

よって、面積 T の五角形 5 個と面積 B の星形の図形で面積 S の正五角形が作られるので、$S = 5T + B$ より、

$B = S - 5T = 18a + 9b - 5(8a - b) = 14b - 22a$

よって、$10A - B = 10(3a + 4b) - (14b - 22a) = 52a + 26b$ となり、これは、$S = 18a + 9b$ の $\boxed{\dfrac{26}{9}\text{倍}}$



【問題 2】

II − (1)

円周角の定理より、$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{CDE}$ および $\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{DCE}$ が成り立つので、$\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{DCE}$

三角形 ABC において、P, Q は A, B から対辺に下ろした垂線の足であり、三角形 DCE において、R, S は C, D から対辺に下ろした垂線の足なので、三角形 ABC と三角形 DCE の相似において、P と R は対応する点であり、Q と S は対応する点である。よって、$\mathrm{AQ} : \mathrm{BP} = \mathrm{DR} : \mathrm{CS}$ より、$3 : 4 = 6 : \mathrm{CS}$ なので、$\mathrm{CS} = 8$

ここで、$\angle\mathrm{AEB} = \angle\mathrm{DEC} = \theta$ とおくと、三角形 APE, BQE, CRE, DSE は 1 つの内角が θ の直角三角形であるから相似であり、$\mathrm{AE} : \mathrm{PE} = \mathrm{BE} : \mathrm{QE} = \mathrm{CE} : \mathrm{RE} = \mathrm{DE} : \mathrm{SE}$ なので、

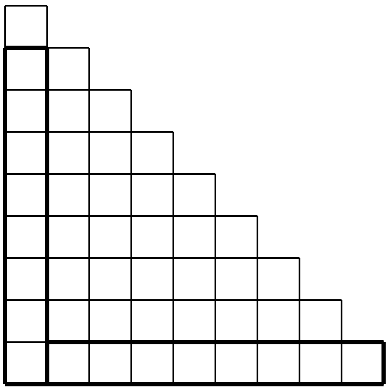
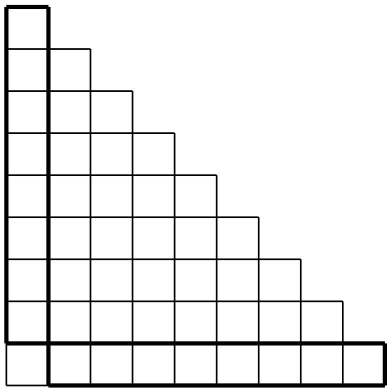
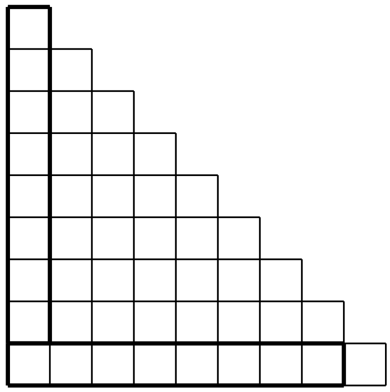
$(\mathrm{AE} + \mathrm{CE}) : (\mathrm{PE} + \mathrm{RE}) = (\mathrm{BE} + \mathrm{DE}) : (\mathrm{QE} + \mathrm{SE})$ より、$\mathrm{AC} : \mathrm{PR} = \mathrm{BD} : \mathrm{QS}$

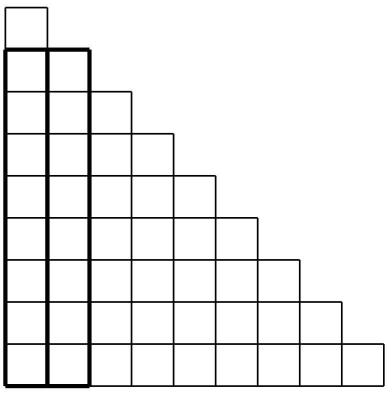
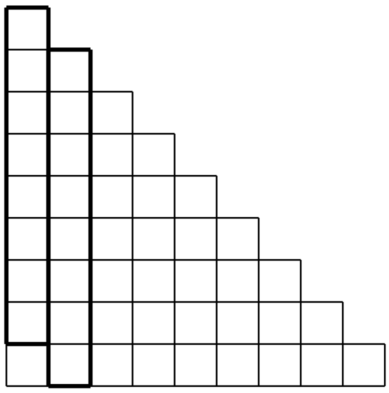
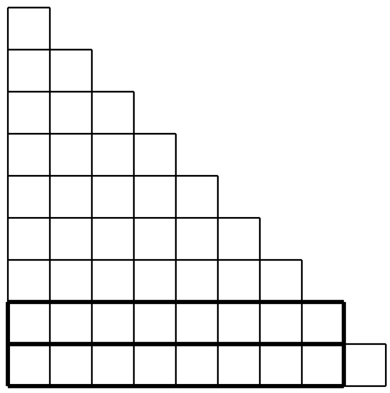
よって、$\mathrm{QS} = x$ とおくと、$(x + 11) : 5 = 15 : x$ より、$x(x + 11) = 75$ なので、$x^2 + 11x - 75 = 0$ となり、これを解いて、$x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{421}}{2}$ となる。よって、$x > 0$ を加味して、$x = \boxed{\dfrac{-11 + \sqrt{421}}{2}}$

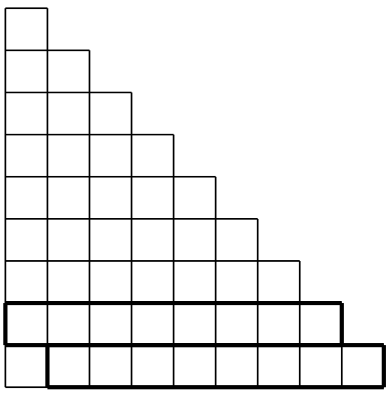
II − (2)

以下の図のように、与えられた領域に 1×8 のタイルを 2 つ置く方法は 7 通りあり、どの置き方においても、1×1 のマス目と ① の形の領域が残る。同様に、① に 1×6 のタイルを 2 つ置く方法は 7 通りあり、どの置き方においても、1×1 のマス目と ② の形の領域が残る。同様に、② に 1×4 のタイルを 2 つ置く方法は 7 通りあり、どの置き方においても、1×1 のマス目と ③ の形の領域が残る。同様に、③ に 1×2 のタイルを 2 つ置く方法は 7 通りあり、どの置き方においても、1×1 のマス目が 2 つ残る。

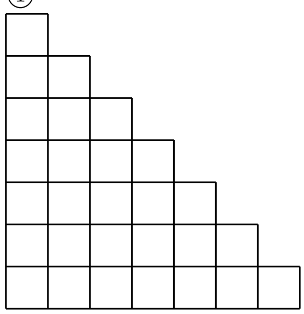
以上より、求める場合の数は、$7^4 = \boxed{2401 \text{ 通り}}$

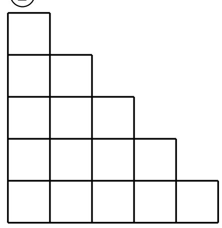






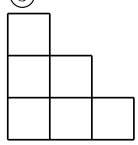
①



②



③



II − (3)

$\begin{cases} xy+2yz+3zx=1274\cdots① \\ 2xy+3yz+4zx1885\cdots② \end{cases}$ とする。①$\times 3-$②$\times 2$ より、$zx-xy=52$ なので、$x(z-y)=52\cdots$③ となり、$x=1,2,4,13,26,52$ に限られる。

②$\times 3-$①$\times 4$ より、$2xy+yz=559$ であり、③ より、$z=y+\dfrac{52}{x}$ なので、$2xy+y\left(2x+\dfrac{52}{x}\right)=559$ より、

$y^2+\left(2x+\dfrac{52}{x}\right)y-559=0\cdots$④

$x=1$ のとき、④ より、$y^2+54y-559=0$ となり、これを満たす整数 y は存在しない。

$x=2$ のとき、④ より、$y^2+30y-559=0$ となり、$(y+43)(y-13)=0$ より、$y=13$ となるので、$z=y+\dfrac{52}{x}=39$

$x=4$ のとき、④ より、$y^2+21y-559=0$ となり、これを満たす整数 y は存在しない。

$x=13$ のとき、④ より、$y^2+30y-559=0$ となり、$(y+43)(y-13)=0$ より、$y=13$ となるので、

$z=y+\dfrac{52}{x}=17$

$x=26$ のとき、④ より、$y^2+54y-559=0$ となり、これを満たす整数 y は存在しない。

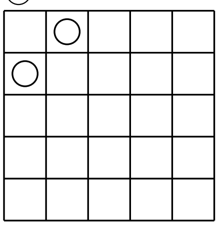
$x=52$ のとき、④ より、$y^2+105y-559=0$ となり、これを満たす整数 y は存在しない。

以上より、$\boxed{(x,y,z)=(2,13,39),(13,13,17)}$ となり、これが ①, ② を満たす正の整数 x,y,z の組である。

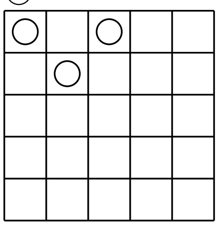
II − (4)

(1) 以下の図において、○は色が塗られていないマスを表すとする。① のとき、条件を満たす盤面は 13 通り。この他に、条件を満たす盤面は ②, ③, ④, ⑤ の 4 通りがあるので、求める場合の数は、$\boxed{\text{17 通り}}$

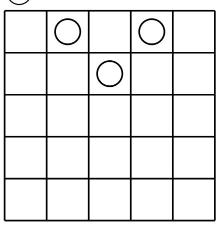
①



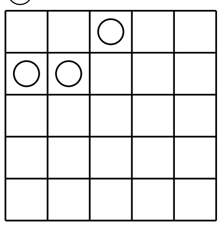
②



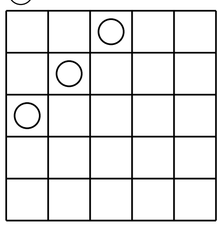
③



④

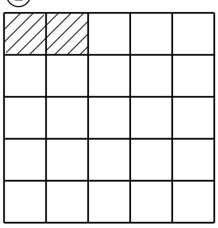


⑤

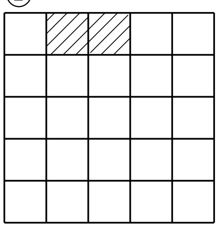


(2) 黒で塗られた隣り合う 2 マスがどこにあるかで場合分けして考える。以下の図の ①, ②, . . . , ⑥ に対し、条件を満たす盤面の総数はそれぞれ、20, 19, 18, 17, 10, 9 なので、求める場合の数は、これらを足し合わせて、$\boxed{\text{93 通り}}$

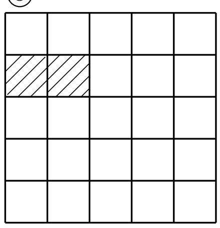
①



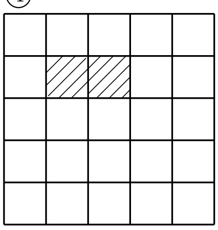
②



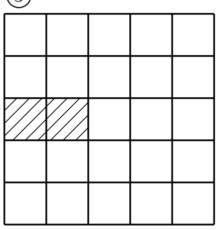
③



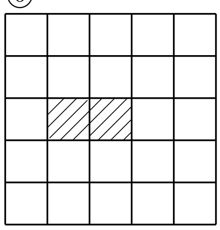
④



⑤



⑥



【問題 3】

I は三角形 ABC の内接円の中心であるから、$\angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{CAP}$ なので、円周角の定理より、$\angle \mathrm{BQP} = \angle \mathrm{CQP}$ となることに注意して、$\mathrm{QB} : \mathrm{QC} = \mathrm{BD} : \mathrm{CD} = \mathrm{BF} : \mathrm{CE}$ であり、円周角の定理より、$\angle \mathrm{QBF} = \angle \mathrm{QCE}$ となることを加味して、$\triangle \mathrm{QBF} \backsim \triangle \mathrm{QCE} \cdots$①

よって、$\angle \mathrm{QFB} = \angle \mathrm{QCE}$ より、$\angle \mathrm{QFA} = \angle \mathrm{QEA}$ より、4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{Q}$ は同一円周上にあり、$\angle \mathrm{AFI} + \angle \mathrm{AEI}$
$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より、4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{F}$ は同一円周上なので、5 点 $\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{F}, \mathrm{Q}$ は同一円周上となる。

よって、円周角の定理より、$\angle \mathrm{QFA} = \angle \mathrm{QIA}$ より、$\angle \mathrm{QFB} = \angle \mathrm{QIP}$ であり、円周角の定理より、$\angle \mathrm{QBF} = \angle \mathrm{QPI}$ であることを加味して、$\triangle \mathrm{QBF} \backsim \triangle \mathrm{QPI} \cdots$②

①, ② より、$\mathrm{FB} : \mathrm{IP} : \mathrm{EC} = \mathrm{QF} : \mathrm{QI} : \mathrm{QE} = 3 : 5 : 6$ なので、$\mathrm{IP} : \mathrm{BC} = \mathrm{IP} : (\mathrm{DB} + \mathrm{DC}) = \mathrm{IP} : (\mathrm{FB} + \mathrm{EC})$
$= 5 : (3 + 6) = 5 : 9$ であり、$\mathrm{BC} = 4$ であるから、$\mathrm{IP} = 4 \times \dfrac{5}{9} = \boxed{\dfrac{20}{9}}$