

問題 1

横 3 列, 縦 3 列, 斜め 2 列のすべての合計は $8+9+10+12+16+17+18+19=109$ 。

9 マスに 1~9 の数を入れることから, 横 3 列と縦 3 列の和は $(1+9) \times 9 \div 2 \times 2 = 90$ 。

斜め 2 列の和は $109-90=19$ より, **斜め列の和は 9 または 10**。

5 はすでに使われているため,

斜めの和が 9 になる組合せは (1,2,6), (2,3,4), 斜めの和が 10 になる組合せは (1,2,7), (1,3,6)。

ただし和が 9 になる組合せが(1,2,6)の場合は, 和が 10 になる組合せと 2 つの数が重複してしまうので不適。よって**斜めの和が 9 になる組合せは(2,3,4)**に決まります。

図 1

ア	5	イ
ウ	エ	8
オ	カ	キ

ここで図 1 のようにア~キとします。斜めの列に含まれないウ,カは 6,7,9 のいずれかであると考えられるため, 和が 8 になるのは最も上の横の列です。このとき(ア, イ)は(1,2)か(2,1)。よって**斜めの和が 10 になる組合せは(1,3,6)**に決まります。

このとき エ=3 で,

残りは条件を満たすようにあてはめると図 2 のようになります。

図 2

1	5	2
7	3	8
4	9	6

答

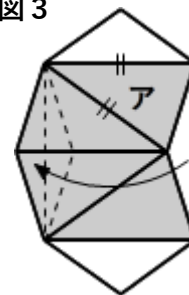
問題 2

図 2 を図 3 のように等積移動すると

図 2 の灰色部分の面積は $\text{ア} \times 4$ であることがわかります。

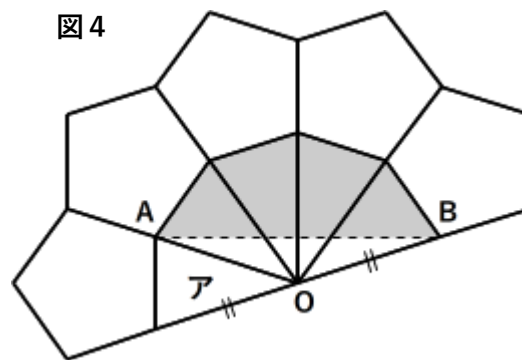
(アは底角 72 度の二等辺三角形)

図 3



次に図 1 に正五角形を 1 つ付け足して図 4 のような図形を考えます。三角形 OAB はアと面積が等しいため、図 1 の灰色部分の面積は $\text{ア} \times 4 - \text{三角形 OAB} = \text{ア} \times 3$ 。

図 4



よって図 1 の面積は図 2 の面積の $\frac{3}{4}$ 倍。

答 $\frac{3}{4}$ 倍 (0.75 倍)

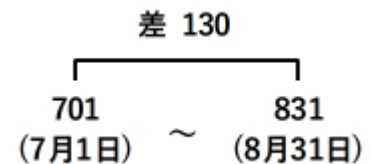
問題 3

問題の条件を整理します。

- ① 3つの数はいずれも2桁の数□で割り切ることができる。
- ② 3つの数をすべて割り切ることができる2以上の整数は□のみ。
- ③ □で割り切ることのできる日付の数は3つの数だけ。
- ④ 3人の誕生日は3か月連続している。

まず条件①,②から□は2桁の素数(11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97)です。ただし、各月の日付は29(うるう年の2月)以上(31以下)なので、□が29以下の場合は、各月に少なくとも1つずつ日付を表す数が存在するため、条件③を満たしません(□=31も明らかに条件③を満たさない)。

月をまたぐ場合、日付の差は図のように最大でも130です。□が130
 $\div 2 = 65$ より大きいとき、条件④を満たすならば、3つの連続する日
 付を表す数は $(\square \times 3, \square \times 4, \square \times 5), (\square \times 5, \square \times 6, \square \times 7), (\square \times 7,$
 $\square \times 8, \square \times 9), \dots$ のように表すことができます。条件②より、かける



数は互いに素(最大公約数が1)なので奇数から始まる3つの連続する数であり、それら以外は存在しません(条件③)。すなわち、□が65以上の素数の場合において、条件③,④を満たすならば、かける数の最大と最小の差は2である必要があります。これをもとに65以上の素数の場合を調べると次のようになります。

□=67の場合。67×3=201, 67×6=402 などが見つかりますが、6-3=3より不適。

□=71の場合。71×3=213, 71×6=426 などが見つかりますが、同様に不適。

□=73の場合。73×3=219, 73×7=511 などが見つかりますが、同様に不適。

□=79の場合。79×4=316, 79×9=711 などが見つかりますが、同様に不適。

□=83の場合。83×5=415, 83×10=830 などが見つかりますが、同様に不適。

□=89の場合。89×7=623, 89×8=712, 89×9=801。89の倍数の下2桁などに着目して調べると、日付を表す数は他に無いことがわかります。よって □=89 は題意を満たします。

□=97の場合。日付を表す数が得られません。

□が30以上65以下の素数(31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61)についてもそれぞれの倍数の下2桁などに着目して調べると、いずれも条件③を満たさないことがわかります。

問題 4

ここでは「敷きつめ方」と区別するために、回転や裏返しによって一致する場合でも、見え方が異なる場合は別に数えるものとして、そのような場合を「置き方」と呼ぶことにします。

(1) ひし形の敷きつめ方で場合分けをします。

図 1 のようにひし形の敷きつめ方 5 通りに対して、それぞれ台形の敷きつめ方を考えます。

アは上下に裏返して重なるため図 2 の A と B(または C)の 2 通り。イ～オはそれぞれ A,B,C の 3 通りずつ。

よって全部で $2 + 3 \times 4 = 14$ 通り。

図 1

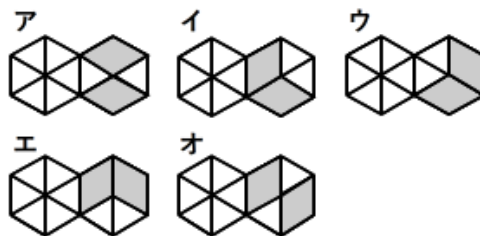
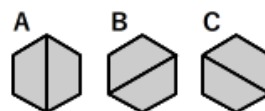


図 2



(2) 台形の敷きつめ方で場合分けをします。

図 3 のように

上下に裏返して重なる台形の敷きつめ方をカ,キ,ク,
左右に裏返して重なる台形の敷きつめ方をケ,コ
回転して重なる台形の敷きつめ方をサ,シとします。

それぞれの場合について台形の置き方とひし形の敷きつめ方を整理すると表 1 のようになります。

図 3

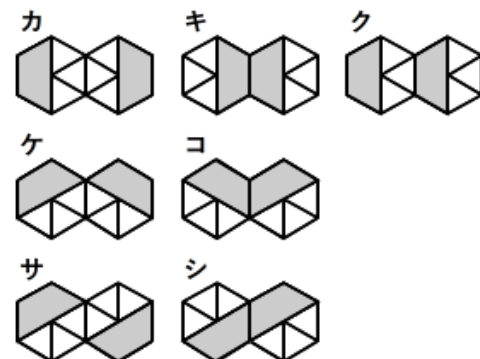


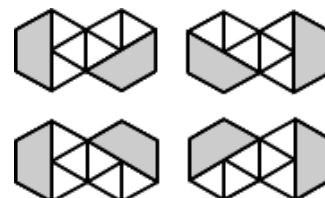
表 1

	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	計
台形の置き方	1	1	2	2	2	2	2	12通り
ひし形の敷きつめ方	2	2	2	3	3	3	3	18通り

台形の置き方は左右で 6 通りずつなので
全部で $6 \times 6 = 36$ 通り です。

よってカ～シ以外の台形の置き方は $36 - 12 = 24$ 通り。例えば図 4 のように回転や裏返しを考えると 1 つの敷きつめ方に対して置き方は 4 通りずつあるので、カ～シ以外の台形の敷きつめ方は $24 \div 4 = 6$ 通り。これらそれぞれに対してひし形の敷きつめ方は 4 通りずつあるため、これらの敷きつめ方は $4 \times 6 = 24$ 通り。

図 4



よってカ～シの敷きつめ方(18 通り)と合わせて全部で $18 + 24 = 42$ 通り。

(3) 左右の六角形をひし形がまたぐ場合、そして台形がまたぐ場合について考えます。

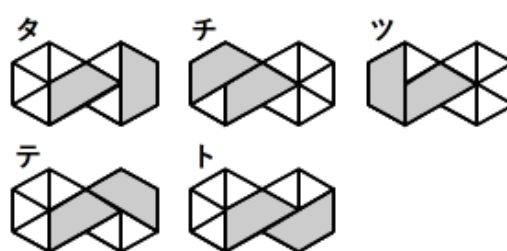
ひし形がまたぐ場合、考えられる台形の敷きつめ方は図5のように3通り。残り1つのひし形の敷きつめ方はそれぞれ1通りずつなので、**ひし形がまたぐ場合は $1 \times 3 = 3$ 通り**。

図5



台形がまたぐ場合、
台形の敷きつめ方は図6のように5通り。
タの場合、2つのひし形に敷きつめ方は1通り。
チ, ツの場合、2つのひし形に敷きつめ方は3通りずつ。
テ, トの場合、2つのひし形に敷きつめ方は4通りずつ。
よって**台形がまたぐ場合は $1 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 2 = 15$ 通り**。

図6



(1)(2)の場合とあわせて敷きつめ方は全部で $14 + 42 + 3 + 15 = 74$ 通り となります。

答 (1) 14 通り (2) 42 通り (3) 74 通り

問題 5

9 つの○を次のように A~I とします。

$$\frac{ABC}{DE} = FG.HI$$

FG.HI を分数に直すと次のようになります。

$$\frac{ABC}{DE} = \frac{FGHI}{100}$$

(1)

$\frac{ABC}{DE}$ は $\frac{FGHI}{100}$ を約分したものなので、DE は 100 の約数です。

DE は 2 桁の整数で 0 は含まれないことから **DE=25**。

(2)

DE=25 のとき $100 \div 25 = 4$ より **$ABC \times 4 = FGHI$** 。ABC は最大でも 987 なので FGHI は $987 \times 4 = 3948$ 以下であることから **F は 1 か 3**。

F=1 の場合、A は 3,4 のいずれかです。A=3 のとき、考えうる G は 4 で $3BC \times 4 = 14HI$ 。ただし HI が 4 の倍数になる(4 の倍数条件)ことなどをもとに調べても、B,C,H,I にあてはまる組合せは見つかりません。同様に A=4 の場合も、条件を満たす組合せは見つかりません。

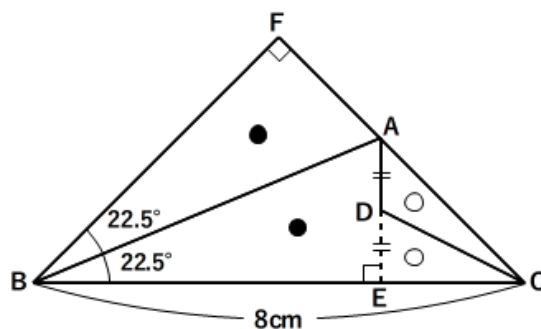
F=3 の場合、A は 7,8,9 のいずれかです。A=7 のとき、考えうる G は 1 で $7BC \times 4 = 31HI$ 。このとき **$796 \times 4 = 3184$** の組合せが見つかります。A=8 のとき、考えうる G は 4 で $8BC \times 4 = 34HI$ 。ただし条件を満たす組合せは見つかりません。A=9 のときを調べても条件を満たす組合せは見つかりません。

$$\text{答 (1) 25 (2) } \frac{796}{25} = 31.84$$

問題 6

図のように，CA を結んでできる直線に対して直角に交わるように B から直線を引き，交点を F とします。

AE = EC より三角形 AEC は直角二等辺三角形であるため 角 ACE は 45 度。よって **三角形 BCF は直角二等辺三角形** です。



このとき 角 FBA = 角 EBA = 22.5° より **三角形 FBA と三角形 EBA は合同**。また AD = DE より **三角形 ADC と三角形 DEC の面積は等しい**ため，**四角形 ABCD の面積は直角二等辺三角形 FBC の面積のちょうど半分**であることがわかります。

三角形 FBC の面積 = $8 \times 4 \div 2 = 16\text{cm}^2$ より 四角形 ABCD の面積 = $16 \div 2 = 8\text{cm}^2$ 。

答 8cm^2

問題 7

$0 < A < B < 886$ を満たす整数 A, B があり,

$9[A]$ と $9[B]$ を 887 でそれぞれ割ったときの余りが等しいと仮定します。

このとき $9[A] = 887 \times \bigcirc + \text{余り}$, $9[B] = 887 \times \square + \text{余り}$ であり, 図 1 の $9[B] - 9[A] = 9[B - A] \times (10 \text{ を } A \text{ 回かけ合わせた数})$ は $887 \times (\square - \bigcirc)$ であるため 887 で割り切れるということになります。

このとき, 10 を A 回かけあわせた数は 887 の倍数ではないため, $9[B - A]$ が 887 の倍数ということになりますが, これは 887 の倍数で最小の $9[N]$ が $9[886]$ ということに矛盾します。よってこの仮定は間違いであり, $9[1], 9[2], 9[3], \dots, 9[885]$ をそれぞれ 887 で割ったときの余りはそれぞれ異なるということになります。

次に $9[886]$ を 887 で割ったときの商を, 図 2 のように筆算で求めることを考えます。商に並ぶ数は $9[1]$ から $9[885]$ をそれぞれ 887 で割ったときの余り (1~886 のうち 885 個) の末尾に 9 をつけ, その数を 887 で割ったときの商です。ただし $8869 \div 887 = 9$ あまり 886 であるため, 余りに 886 が現れた場合はこれ以降の商がすべて 9 になり割り切れなくなるため, 下線部分が示す余りに 886 は含みません。よって下線部が示す余りは 1~885 の 885 個。

$887 \times 9 = 7983$ より, 余りに 798 以上の数が現れた場合, 商に 9 が並びます。よって 1~885 のうち 798 以上の個数が, 商に並ぶ 9 の個数と等しいことがわかります。よって答えは $885 - 798 + 1 = 88$ 個。

図 1

$$\begin{array}{r}
 999 \dots 999 \dots 999 \leftarrow 9[B] \\
 - \quad \quad \quad 99 \dots 999 \leftarrow 9[A] \\
 \hline
 999 \dots 900 \dots 000 \\
 \hline
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{9[B-A]} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A \text{ 桁}}
 \end{array}$$

図 2

$$\begin{array}{r}
 00112 \dots 9 \\
 887 \overline{) 99999 \dots 9 \dots} \\
 \underline{0} \\
 \text{余り} \rightarrow \underline{99} \\
 \underline{0} \\
 \text{余り} \rightarrow \underline{999} \\
 \underline{887} \\
 \text{余り} \rightarrow \underline{1129} \\
 \underline{887} \\
 \text{余り} \rightarrow \underline{2429} \\
 \underline{1774} \\
 \dots \\
 \dots \\
 \text{余り} \rightarrow \boxed{}9 \\
 \underline{7983}
 \end{array}$$

答 88 個

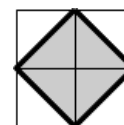
問題 8

(1)

1cm^2 の正方形は $40 \times 40 = 1600$ 個, 2cm^2 の正方形(図 1)は $39 \times 39 = 1521$ 個 あります。

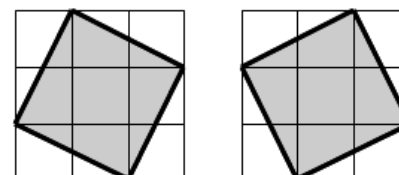
3cm^2 の正方形はなく, 4cm^2 の正方形は $39 \times 39 = 1521$ 個 あります。

図 1



5cm^2 の正方形は図 2 のようにマス目に沿った 1 辺 3cm の正方形の中に 2 個ずつ存在するので, 5cm^2 の正方形は全部で $38 \times 38 \times 2 = 2888$ 個。

図 2

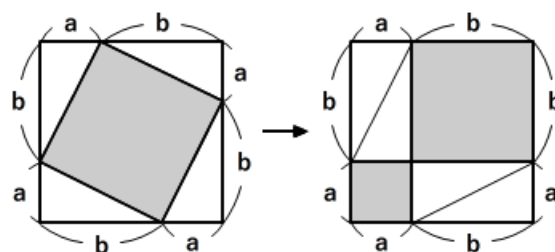


(2)

a, b のどちらかが 0 でもかまわないとすると, 正方形の面積は図 3 のように $a \times a + b \times b$ と表すことができます(ただし a, b を入れ替えたものも同じものとする)。

面積が $a \times a + b \times b$ の形で 1 通りにしか表せないとき, その面積の正方形の個数は $40 \times 40 \times 2 = 3200$ 個を超えることはありません。

図 3



ここで $a \times a + b \times b$ として 2 通りに表すことができる最も小さい値を探すと $0 \times 0 + 5 \times 5 = 25$ (図 4), $3 \times 3 + 4 \times 4 = 25$ (図 5) より 25 が見つかります。

図 4

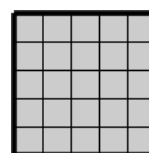


図 5

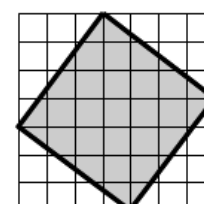


図 4 の正方形の個数は $36 \times 36 = 1296$ 個。

図 5 の正方形は図 2 と同様に 2 通りあるため, その個数は $34 \times 34 \times 2 = 2312$ 個。

合計 $1296 + 2312 = 3608$ 個 で 3200 個を超えます。よって 25cm^2 で 3608 個。

(3)

面積が $a \times a + b \times b$ の形で2通りに表すことができる25の次の値を探します。

まず $1 \times 1 + 7 \times 7 = 50$ (図6), $5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$ (図7) が見つかります。

図6の正方形の個数は $33 \times 33 \times 2 = 2178$ 個。

図7の正方形の個数は $31 \times 31 = 961$ 個。

合計 $2178 + 961 = 3139$ 個 で3800個より少ないため不適。

図6

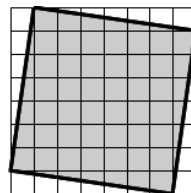
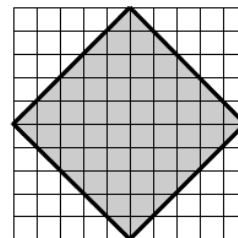


図7



次に $1 \times 1 + 8 \times 8 = 65$ (図8), $4 \times 4 + 7 \times 7 = 65$ (図9) が見つかります。

図8の正方形の個数は $32 \times 32 \times 2 = 2048$ 個。

図9の正方形の個数は $30 \times 30 \times 2 = 1800$ 個。

合計 $2048 + 1800 = 3848$ 個 で3800個を超えることがわかります。

図8

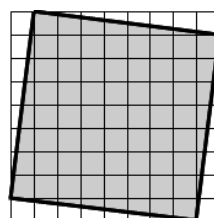
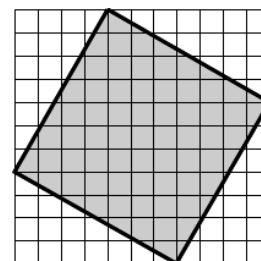


図9



よって 65cm^2 で3848個。

答 (1) 5cm^2 , 2888 個 (2) 25cm^2 , 3608 個 (3) 65cm^2 , 3848 個