

問題 1

図のように一の位から A~F とします。

一の位(A,B)は (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) のいずれか。

百の位(E,F)は (5,2), (4,3) のいずれか。

このとき 8 は十の位で使うことになるため $C=8$ で、
C から A への繰り下がり考えると $D=6$ 。

このとき 百の位(E,F)=(5,2), 一の位(A,B)=(3,4) があてはまります。

$$\begin{array}{r} 7 \ C \ A \\ - \ E \ 1 \ 9 \\ \hline F \ D \ B \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \ 8 \ 3 \\ - \ 5 \ 1 \ 9 \\ \hline 2 \ 6 \ 4 \end{array}$$

答

問題 2

10 桁の整数において、それぞれの組の小さい方の数を図のように A~E とします。(求めたいのは最大の数であるため、すべての組において 左 > 右)

A+1	A	B+2	B	C+3	C	D+4	D	E+5	E
差が1		差が2		差が3		差が4		差が5	

$0+1+2+\cdots+9=45$ より $A+1+A+B+2+B+C+3+C+D+4+D+E+5+E=45$ 。

すなわち $(A+B+C+D+E) \times 2 + 15 = 45$ より $A+B+C+D+E=15$ 。

最大の 10 桁の整数を求めたいので $A=8$ と仮定すると $B+C+D+E=7$ 。

このとき (B,C,D,E) の組合せは (0,1,2,4) のみが考えられます。

$A=8, A+1=9$ であることから、D,E は 4 ではありません。

$B=0$ のとき $B+2=2$ となるため、B は 0 ではありません。

$C=1$ のとき $C+3=4$ となるため、C は 1 ではありません。

$D=0$ のとき $D+4=4$ となるため、D は 0 ではありません。

これらをもとに条件を満たす B,C,D,E を調べると $(B,C,D,E) = (4,0,1,2), (1,4,2,0)$ が見つかります。

最大は $(B,C,D,E) = (4,0,1,2)$ の場合で、このとき 10 桁の整数は 9864305172 となります。

答 9864305172

問題3

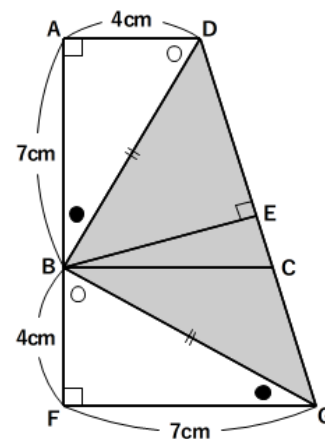
直角二等辺三角形 BDE と同じ大きさの直角二等辺三角形 BGE をくっつけて、図のような台形 AFGD を作ります。

角 ABD = ●, 角 ADB = ○ とすると ● + ○ = 90°。

角 FBG = 90 - ● = ○ より 角 FGB = ●。

また BD = BG より三角形 ABD と三角形 FBG は同じ形(合同)。

よって BF = 4cm, FG = 7cm。



三角形 BGD の面積

= 台形 AFGD - 三角形 ABD - 三角形 FGB = $11 \times 11 \div 2 - 4 \times 7 \div 2 - 4 \times 7 \div 2 = 32.5\text{cm}^2$ 。

三角形 BGD の底辺を BC と考えると、高さは AF = 11cm なので

$BC \times 11 \div 2 = 32.5$ より $BC = 5\frac{10}{11}\text{cm}$ 。

答 $5\frac{10}{11}\text{cm}$

問題 4

(1)

2桁の数について考えると、一の位に対して、条件を満たす十の位はそれぞれ表1のようになります。2桁の数は $1\text{個} \times 1 + 2\text{個} \times 4 + 3\text{個} \times 2 + 4\text{個} \times 2 = 23$ 個より99は23番目。100～110は数列に現れないため111は $23 + 1 = 24$ 番目。

表 1

十の位	一の位	個数
1	1	1個
1,2	2	2個
1,3	3	2個
1,2,4	4	3個
1,5	5	2個
1,2,3,6	6	4個
1,7	7	2個
1,2,4,8	8	4個
1,3,9	9	3個

(2)

3桁の数について考えると、一の位に対して、条件を満たす十,百の位はそれぞれ表2のようになります。3桁の数は $1\text{個} + 4\text{個} \times 4 + 9\text{個} \times 2 + 16\text{個} \times 2 = 67$ 個。2桁の数とあわせて999は $23 + 67 = 90$ 番目。800台は一の位が8, すなわち $8 \square 8$ で4個。900台は一の位が9, すなわち $9 \square 9$ で3個。よって700台最後の777は $90 - (4 + 3) = 83$ 番目。

表 2

百の位	十の位	一の位	個数
1	1	1	1個
1,2	1,2	2	4個
1,3	1,3	3	4個
1,2,4	1,2,4	4	9個
1,5	1,5	5	4個
1,2,3,6	1,2,3,6	6	16個
1,7	1,7	7	4個
1,2,4,8	1,2,4,8	8	16個
1,3,9	1,3,9	9	9個

(3)

4桁の数について考えると、一の位に対して、条件を満たす十,百,千の位はそれぞれ表3のようになります。4桁の数は $1\text{個} + 8\text{個} \times 4 + 27\text{個} \times 2 + 64\text{個} \times 2 = 215$ 個。2桁,3桁の数とあわせて9999は $23 + 67 + 215 = 305$ 番目。

表 3

千の位	百の位	十の位	一の位	個数
1	1	1	1	1個
1,2	1,2	1,2	2	8個
1,3	1,3	1,3	3	8個
1,2,4	1,2,4	1,2,4	4	27個
1,5	1,5	1,5	5	8個
1,2,3,6	1,2,3,6	1,2,3,6	6	64個
1,7	1,7	1,7	7	8個
1,2,4,8	1,2,4,8	1,2,4,8	8	64個
1,3,9	1,3,9	1,3,9	9	27個

333番目まであと28個です。5桁の数を調べます。

1111□は9個, 1112□は4個, 1113□は3個, 1114□は2個, 1115□, 1116□, 1117□, 1118□, 1119□はそれぞれ1個ずつなので11199は $305 + 9 + 4 + 3 + 2 + 5 = 328$ 番目。

残りの5個を調べると11212, 11214, 11216, 11218, 11222。

よって333番目は11222。

答 (1) 24 番目 (2) 83 番目 (3) 11222

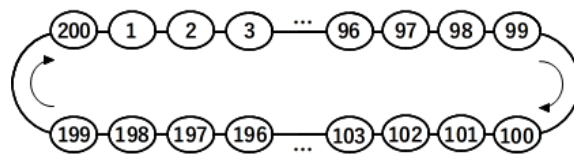
問題 5

ペアになる相手の番号が 2 ずつ小さくなっていく場合。

初めにペアになる相手の番号を○とすると

$\bigcirc + (\bigcirc - 2) + (\bigcirc - 4) + (\bigcirc - 6) = 400$ より $\bigcirc = 103$ 。

このときこの子のゼッケン番号は $199 - 103 = 96$ 番。



ペアになる相手の番号が途中で大きな数(200 または 199)にもどる場合。

調べると $3 + 1 + 199 + 197 = 400$ が見つかります。

初めにペアになる相手の番号は 3 なので,

このときこの子のゼッケン番号は $199 - 3 = 196$ 番。

答 96 番, 196 番

問題 6

路線 A,B,C の発車間隔を a,b,c (問題条件より $a < c$) と表すことにします。

240 分後に再び同時に発車するので、 **a,b,c はいずれも 240 分の約数(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240)**です。ただし、1 と 2 は発車本数の条件(240 分間で 110 本以下)を満たさないので、不適です。

P さんの目撃情報から、 a,b,c それぞれの倍数が 1 ずつずれて(連続して)並ぶことがあるはずです。

このとき連続して並ぶ a,b,c の倍数は奇数,偶数,奇数か、偶数,奇数,偶数のいずれかなので、

a,b,c は奇数,偶数,奇数、または b が奇数、のいずれかであることがわかります。

a,c が奇数のとき、3,5,15 のいずれかです。 c が 15 のとき a は 3 か 5 ですが、A の発車の 2 分後に C が発車するようなことは起こりません。また c が 5 のとき a は 3 ですが、このときは 240 分間の発車本数の合計が 110 本を超えてしまいます。よって **a,b,c が奇数,偶数,奇数の場合は不適**。

すなわち **b は奇数(3,5,15 のいずれか)**。

b が 3 のとき、本数の条件から a,c は 8 以上です。また a,c が 3 の倍数ならば、 a,b,c が連続して並ぶことはないので、 a,c は 3 の倍数ではありません。よって **a,c は奇数ではなく偶数**。このとき A と C で 2 分のずれが発生するためには、一方が 4 の倍数で、もう一方が 4 の倍数+2 である必要があります。よって一方は 10 で、本数条件からもう一方は 40 か 80 が考えられますが、40 と 80 は 10 の倍数であるため 1 分ごとに連続して発車するようなことは起こりません。よって **b は 3 ではありません**。

b が 5 のとき、本数の条件から a,c は 3 ではなく、また 5 の倍数も不適です。よって **a,c は 5 の倍数以外の偶数**。先ほどと同様に a,c は一方が 4 の倍数で、もう一方が 4 の倍数+2 である必要があります。このとき一方は 6 でもう一方は 16 です。 $a=6, b=5, c=16$ のとき、1 分ずつのずれを生む倍数を調べると 174, 175, 176 が見つかります。よって **$a=6, b=5, c=16$ が題意を満たします**。

$b=15$ のとき、 a,c は 3 や 5 の倍数ではないので、4,8,16 のいずれかが考えられますが、いずれも 4 の倍数であるため、A,C で 2 分のずれが発生することはありません。

答 A 6 分, B 5 分, C 16 分

問題 7

図 1 のように三角形 ABE を三角形 DFE に等積移動して、
B と F を結び、頂角 30 度の二等辺三角形 BFE を作ります。

直角二等辺三角形 BCD と二等辺三角形 BFD は、図 2 のよう
に底辺を BD とすると、高さは等しいので、面積は等しいこと
がわかります。よってもとの五角形 ABCDE と三角形 BFE の
面積は同じです。※ 図 2 の三角形 DGF は正三角形の半分の形
なので FG は DF の半分の長さ。

図 3 のように三角形 BFE において $BE = FE = \bigcirc$
cm とします。底辺を BE とすると、高さは $\bigcirc \div 2$
であるため、次の式が成り立ちます。 $\bigcirc \times \bigcirc \div 2 \div$
 $2 = 144\text{cm}^2$

$\bigcirc \times \bigcirc = 576$ で $576 = 24 \times 24$ より
 $BE = \bigcirc = 24\text{cm}$ 。

答 24cm

図 1

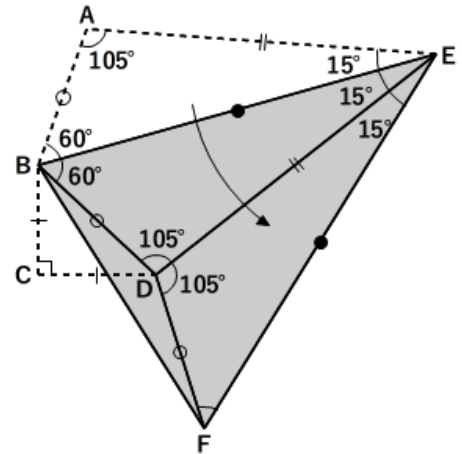


図 2

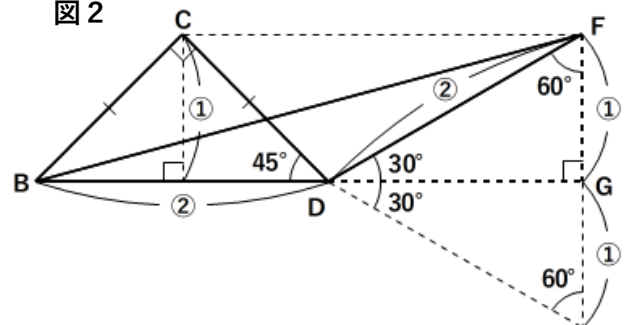
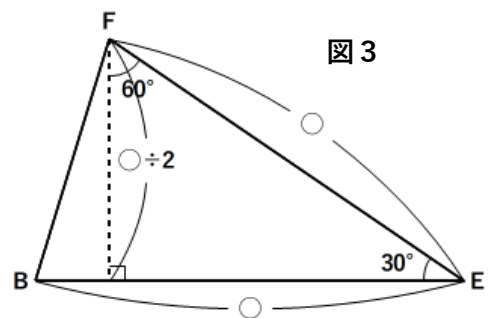


図 3



問題 8

(1)

十の位の和 $B+E+H$ の一の位が 2 であることから、百の位に 1 か 2 繰り上がるので $A+D+G$ は 18 か 19。また $C+F+I$ は 6 か 16。このとき $A+D+G, B+E+H, C+F+I$ の組合せは表 1 の①～④が考えられます。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \\ + & G & H & I \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}
 \end{array}$$

表 1

0～9 の和は 45 であるため、表 1 の①,②,④の組合せは不適。よって適切な組合せは③で、**使わない数字は $45-37=8$** です。

	A+D+G	B+E+H	C+F+I	合計
①	18	22	6	46
②	18	21	16	55
③	19	12	6	37
④	19	11	16	46

(2)

③の場合、数字の組合せは表 2 の 4 通りが考えられます。

表 2

百の位(A,D,G), 十の位(B,E,H), 一の位(C,F,I), それぞれ $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りの並べ方があるので、全部で $6 \times 6 \times 6 \times 4 = 864$ 通り。

A+D+G	B+E+H	C+F+I
3,7,9	2,4,6	0,1,5
3,7,9	1,5,6	0,2,4
4,6,9	2,3,7	0,1,5
4,6,9	0,5,7	1,2,3

答 (1) 8 (2) 864 通り