広中杯 2026Jr ファイナル　解答

【問題 1】

(1) $S=1+2+3+4+5+6+0+1+2+3+4+5+6+0+1+2+3+4+5+6+0+1+2+3+4+5+6$ の 2 つの「+」を「×」に変えて S を 7 の倍数のままにする方法の総数を求めればよい。

0 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は 7 減り、1 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は 3 減り、
2 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は変わらず、3 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は 15 増え、
4 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は 48 増え、5 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は 105 増え、
6 の両隣の「+」を「×」に変えると、S は 11 減る。
よって、連続する 2 ヶ所の「+」を「×」に変えて S が 7 の倍数のままとなるのは、$0,2,5$ のいずれかの両隣を変えるときの 11 通り。

0 の右の「+」を「×」に変えると、S は 1 減り、1 の右の「+」を「×」に変えると、S は 1 減り、
2 の右の「+」を「×」に変えると、S は 1 増え、3 の右の「+」を「×」に変えると、S は 5 増え、
4 の右の「+」を「×」に変えると、S は 11 増え、5 の右の「+」を「×」に変えると、S は 19 増え、
6 の右の「+」を「×」に変えると、S は 6 減る。
よって、連続しない 2 ヶ所の「+」を「×」に変えて S が 7 の倍数のままとなるのは、0 と 2 の右の「+」を変える 12 通りと、0 と 6 の右の「+」を変える 6 通りと、1 と 2 の右の「+」を変える 12 通りと、1 と 6 の右の「+」を変える 12 通りの計 42 通り。

以上より、求める場合の数は、$11+42=$ **53 通り**

(2) $S=\underbrace{1\times2\times3\times4\times5\times6\times}_{①}0\underbrace{\times1\times2\times3\times4\times5\times6\times}_{②}0\underbrace{\times1\times2\times3\times4\times5\times6\times}_{③}0\underbrace{\times1\times2\times3\times4\times5\times6}_{④}$

の 2 つの「+」を「×」に変えて S を 7 の倍数のままにする方法の総数を求めればよい。

(あ) ② と ③ から 1 つずつ「×」を選んで「+」に変えるとき
S は必ず 7 の倍数となり、記号の選び方は全部で $7^2=49$ 通り。

(い) ①から 2 つの「×」を選んで「+」に変えるとき
S が 7 の倍数となるのは ① を「$1+2\times3+4\times5\times6\times0$」「$1+2\times3\times4\times5\times6+0$」「$1\times2+3\times4+5\times6\times0$」「$1\times2\times3+4\times5\times6+0$」「$1\times2\times3\times4\times5+6+0$」に変える 5 通り。

(う) ④から 2 つの「×」を選んで「+」に変えるとき
S が 7 の倍数となるのは ④ を「$0+1\times2\times3\times4\times5+6$」「$0\times1+2\times3\times4\times5+6$」「$0\times1\times2+3\times4+5\times6$」「$0\times1+2\times3+4\times5\times6$」「$0+1\times2\times3+4\times5\times6$」「$0+1+2\times3\times4\times5\times6$」に変える 6 通り。

(え) ① と ④ から 1 つずつ「×」を選んで「+」に変えるとき
$1, 1\times2, 1\times2\times3, \ldots, 1\times2\times\cdots\times6$ を 7 で割った余りはそれぞれ $1,2,6,3,1,6$ であり、
$1\times2\times\cdots\times6, \ldots, 4\times5\times6, 5\times6, 6$ を 7 で割った余りはそれぞれ $6,6,3,1,2,6$ であることに注意して、
① の中で左から k 番目にある「×」を A_k とし、④ の中で左から k 番目にある「×」を B_k とすると、S が 7 の倍数となるような記号の選び方は、$(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_6),(A_3,B_4),(A_5,B_1),(A_5,B_2),(A_5,B_6),(A_6,B_4)$ の 8 通り。

(あ), (い), (う), (え) 以外の方法では S は 7 の倍数にならないことに注意して、求める場合の数は、
$49+5+6+8=$ **68 通り**

【問題 2】

(1) $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{100!}{Q^2}=\dfrac{100!}{2^{100}\cdot 50!\cdot 50!}=\dfrac{{}_{100}\mathrm{C}_{50}}{2^{100}}$ より、$\dfrac{2^{100}P}{Q}$ は整数なので、P,Q の素数 p で割り切れる回数を a_p, b_p とすると、任意の奇素数 p に対し、$a_p \geqq b_p$ である。x を超えない最大の整数を $[x]$ とおくと、

$a_2=0, b_2=\left[\dfrac{100}{2}\right]+\left[\dfrac{100}{4}\right]+\left[\dfrac{100}{8}\right]+\left[\dfrac{100}{16}\right]+\left[\dfrac{100}{32}\right]+\left[\dfrac{100}{64}\right]=50+25+12+6+3+1=97$

であり、$a_{61}=a_{67}=a_{71}=a_{73}=a_{83}=a_{89}=a_{97}=1, b_{61}=b_{67}=b_{71}=b_{73}=b_{83}=b_{89}=b_{97}=0$ より、

$A=(a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_{97}+1)=(a_3+1)(a_5+1)\cdots(a_{59}+1)2^7, B=98(b_3+1)(b_5+1)\cdots(b_{59}+1)$

なので、**(c) $A>B$** となる。

(2) (i) 条件を満たす n 段の階段ののぼり方の総数を a_n とする。

条件を満たす n 段の階段ののぼり方のうち、最初に 1 段のぼる場合の数は、残りの $n-1$ 段ののぼり方を考えて、a_{n-1} 通りであり、最初に 1 段飛ばしでのぼる場合の数は、次は 1 段だけのぼることになることに注意して、残りの $n-3$ 段ののぼり方を考えて、a_{n-3} 通りであるから、$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$ となる。

よって、$a_1=1, a_2=2, a_3=3$ を加味して、以下のようになるので、求める場合の数は、$a_{10}=$ **41 通り**

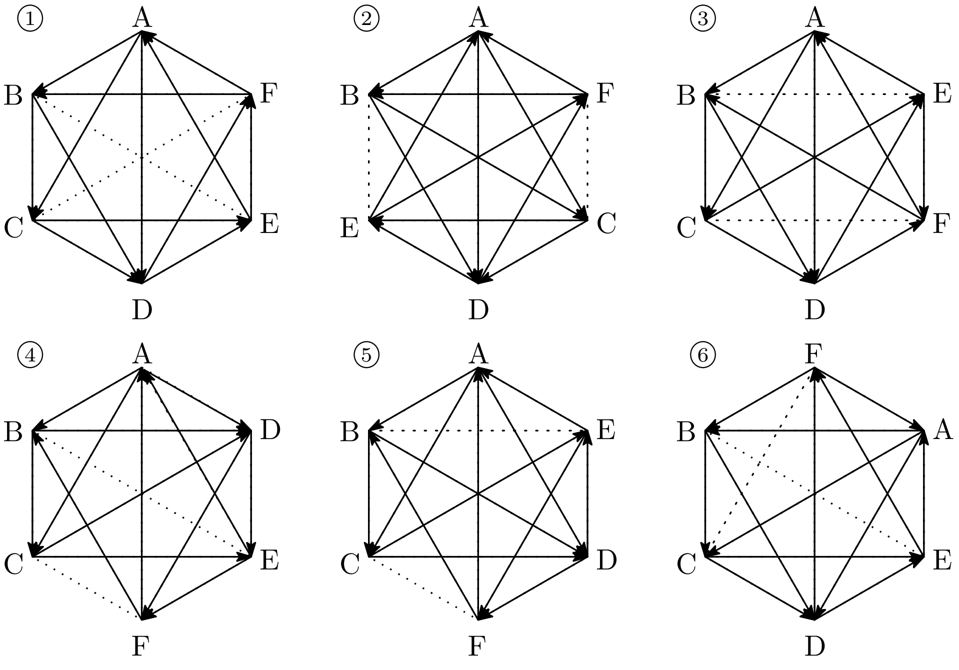
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129	189	277

(ii) 8 段目を踏まない場合、6 段目を踏んだのち、1 段のぼって 7 段目を踏み、1 段飛ばしで 9 段目を踏んだのち、10 段目を踏むことになる。よって、15 段の階段ののぼり方 $a_{15}=277$ 通りのうち、8 段目を踏まないものの場合の数は、6 段目までののぼり方が $a_6=9$ 通りあり、10 段目からののぼり方が $a_5=6$ 通りであるから、$9\times 6=54$ 通りなので、8 段目を踏むものは、$277-54=$ **223 通り**

(3) 15 本の線分の長さとしてあり得る値は $1, 2, 0.866\times 2=1.732$ の 3 通りであり、13 本の線分を選ぶとき、選ばない 2 本の線分の長さの組み合わせは以下の 6 通りである。

①2 と 2　②1 と 1　③1.732 と 1.732　④1 と 2　⑤1 と 1.732　⑥2 と 1.732

これら全ての場合に対し、以下の図において、A, B, C, D, E, F, A, C, E, A, D, F, B, D の順にたどる経路を考えることで、一筆書きが作れるので、求める場合の数は、**6 通り**



(4) $a, b, \ldots, j$ の一の位を $a_1, b_1, \ldots, j_1$とすると、$0 \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq \cdots \leqq j_1 \leqq 3$ である。

$a_1, b_1, \ldots, j_1$のうち、1 以上, 2 以上, 3 以上のものの個数を x_1, x_2, x_3とすると、$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3$であり、

$a_1, b_1, \ldots, j_1$の中に 0, 1, 2, 3 はそれぞれ $10 - x_1$個, $x_1 - x_2$個, $x_2 - x_3$個, x_3個あるので、$a, b, \ldots, j$ の一の位の和は $x_1 - x_2 + 2(x_2 - x_3) + 3x_3 = x_1 + x_2 + x_3$となる。

同様に、$a, b, \ldots, j$ の十の位を $a_2, b_2, \ldots, j_2$とすると、$0 \leqq a_2 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq j_2 \leqq 3$ であり、

$a_2, b_2, \ldots, j_2$のうち、1 以上, 2 以上, 3 以上のものの個数を y_1, y_2, y_3とすると、$y_1 \geqq y_2 \geqq y_3$となり、

$a, b, \ldots, j$ の十の位の和は $y_1 + y_2 + y_3$である。

同様に、$a, b, \ldots, j$ の百の位を $a_3, b_3, \ldots, j_3$とすると、$0 \leqq a_3 \leqq b_3 \leqq \cdots \leqq j_3 \leqq 3$ であり、$a_3, b_3, \ldots, j_3$のうち、1 以上, 2 以上, 3 以上のものの個数を z_1, z_2, z_3とすると、$z_1 \geqq z_2 \geqq z_3$となり、

$a, b, \ldots, j$ の百の位の和は $z_1 + z_2 + z_3$である。

よって、$a + b + \cdots + j = 1665$ より、$100(z_1 + z_2 + z_3) + 10(y_1 + y_2 + y_3) + (x_1 + x_2 + x_3) = 1665 \cdots$ ① となる。

ここで、$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \cdots$ ② が 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の並べ替えでなかったとすると、② の中に登場しない 1 以上 9 以下の整数 k がとれることになるが、これは、$a, b, \ldots, j$ のうち、k 番目に大きい数と $k + 1$ 番目に大きい数が一致することを意味し、条件を満たさない。

逆に、「② が $1, 2, \ldots, 9$ の並べ替えである」$\cdots$ ③ という条件を満たすとき、$a, b, \ldots, j$ は相異なる数となる。

① より、$x_1 + x_2 + x_3$の一の位は 5 であり、③ より、$6 \leqq x_1 + x_2 + x_3 \leqq 24$ なので、$x_1 + x_2 + x_3 = 15$ となる。

よって、① より、$10(z_1 + z_2 + z_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 165$ であり、$y_1 + y_2 + y_3$の一の位は 5 となるが、

③ より、$6 \leqq y_1 + y_2 + y_3 \leqq 24$ なので、$y_1 + y_2 + y_3 = 15$ となる。

よって、① より、$z_1 + z_2 + z_3 = 15$ となる。

以上より、$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$ は「$(9, 5, 1), (8, 4, 3), (7, 6, 2)$ の並べ替え」または

「$(9, 4, 2), (8, 6, 1), (7, 5, 3)$ の並べ替え」となるので、求める場合の数は、$3! \times 2 =$ **12 通り**

(5) I は三角形 ABC の内接円の中心なので、$\angle \mathrm{BAI} = \angle \mathrm{CAI} = a, \angle \mathrm{ABI} = \angle \mathrm{CBI} = b, \angle \mathrm{ACI} = \angle \mathrm{BCI} = c$ とおける。

三角形 ABC の内角の和は 180°なので、$2a + 2b + 2c = 180°$ より、$a + b + c = 90°$ となるから、

$\angle \mathrm{BAI} = \angle \mathrm{CAI} = a, \angle \mathrm{AID} = \angle \mathrm{AIE} = 90°$ より、$\angle \mathrm{ADI} = \angle \mathrm{AEI} = 90° - a = b + c$ となる。

よって、$\angle \mathrm{DIB} = \angle \mathrm{ADI} - \angle \mathrm{ABI} = b + c - b = c = \angle \mathrm{ECI}, \angle \mathrm{EIC} = \angle \mathrm{AEI} - \angle \mathrm{ACI} = b + c - c = b = \angle \mathrm{DBI}$ となるので、$\triangle \mathrm{DBI} \backsim \triangle \mathrm{EIC} \cdots$ ①

ここで、$\angle \mathrm{BAI} = \angle \mathrm{CAI} = a, \angle \mathrm{AID} = \angle \mathrm{AIE} = 90°$ に注意すると、$\triangle \mathrm{AID} \equiv \triangle \mathrm{AIE}$ であり、DI = EI となる。

よって、DI = EI = x とおくと、① より、$72 : x = x : 200$ となり、$x^2 = 14400$ なので、$x = 120$ であり、

$\mathrm{DE} = 2x =$ **240**

(6) 一般に、正の整数 n に対し、$2^n \times 2^n$ のマス目について、「よい長方形」の個数の最大値を求める。以下、駒を置くマスを黒で塗り、駒を置かないマスを白で塗ることにする。

異なる 2 つの行について、同じ色で塗られている列の個数を a とし、異なる色で塗られている列の個数を b とすると、この 2 行の中に四隅の 4 マスがある「よい長方形」の個数は、ab 個となり、

$ab = a(2^n - a) = -(a - 2^{n-1})^2 + 2^{2n-2}$ は $a = b = 2^{n-1}$ のとき、最大値 2^{2n-2} をとる。

よって、どの異なる 2 つの行についても同じ色で塗られている列の個数と異なる色で塗られている列の個数が一致するような塗り方 (以下、このような塗り方を「よい塗り方」と呼ぶことにする) が構成出来れば、このとき、

「よい長方形」の個数は最大となり、求める最大値は、$2^{2n-2} \times {}_{2^n}\mathrm{C}_2 = 2^{2n-2} \times \dfrac{2^n(2^n - 1)}{2} = 2^{3n-3}(2^n - 1)$ 個となる。

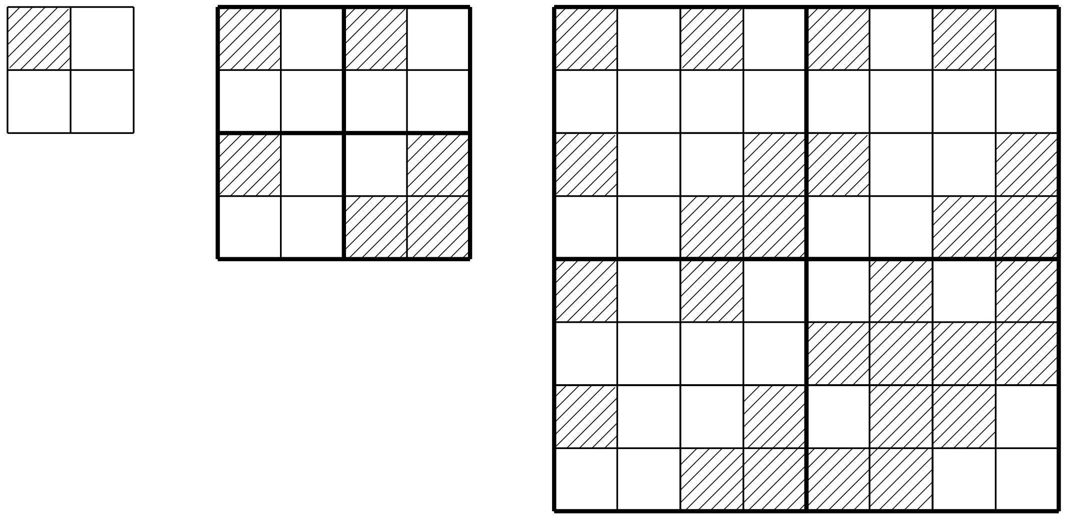
以下、$2^n \times 2^n$ のマスに対し、「よい塗り方」が存在することを示す。

まず、$n = 1$ のとき、左上のマスを黒く塗ることで、「よい塗り方」となる。

また、$2^k \times 2^k$ のマスについて、「よい塗り方」があったとすると、以下の図のように、その盤面を右と下にくっつけたうえで、右下には白と黒を反転させた盤面をくっつけることで、$2^{k+1} \times 2^{k+1}$ のマスに対し、「よい塗り方」が作れる。

($\because$ 上から 2^k 行目までの異なる 2 行または下から 2^k 行目までの異なる 2 行を選んだとき、左から 2^k 列目までについては同じ色で塗られている列と異なる色で塗られている列の個数は同数であり、右から 2^k 列目までについても同じ色で塗られている列と異なる色で塗られている列の個数は同数である。また、上から 2^k 行目までと下から 2^k 行目から 1 行ずつ選んだ場合、左から 2^k 列目まではどの列も同じ色で塗られており、右から 2^k 列目まではどの列も異なる色で塗られている。)

以上より、$2^n \times 2^n$ のマスに対し、「よい塗り方」が存在するので、求める最大値は $2^{3n-3}(2^n - 1)$ であり、特に、$n = 3$ のときの最大値は $2^6 \times 7 = \boxed{448}$



【問題 3】

$N' = \overline{9ca99bb9a}$とする。

以下の表より、平方数である N を 9 で割った余りは $0, 1, 4, 7$ に限られ、平方数の 2 倍である N'を 9 で割った余りは $0, 2, 5, 8$ に限られるが、N と N'の各位の和が等しいことから、N と N'の 9 で割った余りは等しいので、
N と N'は 9 の倍数となる。よって、N の各位の和は 9 の倍数なので、$2a + 2b + c$ は 9 の倍数である。$\cdots$①

$n \div 9$ の余り	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 \div 9$ の余り	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$2n^2 \div 9$ の余り	0	2	8	0	5	5	0	8	1

以下の表より、平方数である N を 11 で割った余りは $0, 1, 3, 4, 5, 9$ に限られ、平方数の 2 倍である N'を 11 で割った余りは $0, 2, 6, 7, 8, 10$ に限られるが、N と N'の 11 で割った余りは、$(a+b+9+a+9)-(9+b+9+c)$ を 11 で割った余り、すなわち、$2a - c$ を 11 で割った余りとなり、一致することから、N と N'は 11 の倍数であり、
$2a - c$ は 11 の倍数となる。$\cdots$②

$n \div 11$ の余り	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 \div 11$ の余り	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$2n^2 \div 11$ の余り	0	2	8	7	10	6	6	10	7	8	2

また、平方数の一の位は $0, 1, 4, 5, 6, 9$ のいずれかなので、平方数を 2 倍したものの一の位は $0, 2, 8$ のいずれかであるから、a は 2 か 8 に限られる。

$a = 8$ のとき、② より、$c = 5$ となるが、このとき、N の下 2 桁が 59 となるので、N は 4 で割って 3 余る数となるが、以下の表より、4 で割って 3 余る平方数は存在しないので、これは、N が平方数という条件に反している。

$n \div 4$ の余り	0	1	2	3
$n^2 \div 4$ の余り	0	1	0	1

以上より、$a = 2$ に限られ、② より、$c = 4$ となり、① より、$2b + 8$ は 9 の倍数なので、$b = 5$ となる。

よって、求める N の値は、$\boxed{295599249}$

実際、$(a, b, c) = (2, 5, 9)$ のとき、$N = 295599249 = 17193^2, N' = 942995592 = 2 \times 21714$ であり、条件を満たしている。