

広中杯 2026 ファイナル 解答

【問題 1】

- (1) $S = 1+2+3+4+5+6+0+1+2+3+4+5+6+0+1+2+3+4+5+6+0+1+2+3+4+5+6$ の 2 つの「+」を「×」に変えて S を 7 の倍数のままにする方法の総数を求めればよい。

0 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は 7 減り、1 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は 3 減り、2 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は変わらず、3 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は 15 増え、4 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は 48 増え、5 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は 105 増え、6 の両隣の「+」を「×」に変えると、 S は 11 減る。

よって、連続する 2 ヶ所の「+」を「×」に変えて S が 7 の倍数のままとなるのは、0, 2, 5 のいずれかの両隣を変えるときの 11 通り。

0 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 1 減り、1 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 1 減り、2 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 1 増え、3 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 5 増え、4 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 11 増え、5 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 19 増え、6 の右の「+」を「×」に変えると、 S は 6 減る。

よって、連続しない 2 ヶ所の「+」を「×」に変えて S が 7 の倍数のままとなるのは、0 と 2 の右の「+」を変える 12 通りと、0 と 6 の右の「+」を変える 6 通りと、1 と 2 の右の「+」を変える 12 通りと、1 と 6 の右の「+」を変える 12 通りの計 42 通り。

以上より、求める場合の数は、 $11 + 42 = \boxed{53}$ 通り

- (2) $S = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 0}_{\textcircled{1}} \underbrace{\times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 0}_{\textcircled{2}} \underbrace{\times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 0}_{\textcircled{3}} \underbrace{\times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}_{\textcircled{4}}$

の 2 つの「+」を「×」に変えて S を 7 の倍数のままにする方法の総数を求めればよい。

(あ) ②と③から 1 つずつ「×」を選んで「+」に変えるとき

S は必ず 7 の倍数となり、記号の選び方は全部で $7^2 = 49$ 通り。

(い) ①から 2 つの「×」を選んで「+」に変えるとき

S が 7 の倍数となるのは①を「 $1+2 \times 3+4 \times 5 \times 6 \times 0$ 」「 $1+2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6+0$ 」「 $1 \times 2+3 \times 4+5 \times 6 \times 0$ 」「 $1 \times 2 \times 3+4 \times 5 \times 6+0$ 」「 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5+6+0$ 」に変える 5 通り。

(う) ④から 2 つの「×」を選んで「+」に変えるとき

S が 7 の倍数となるのは④を「 $0+1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5+6$ 」「 $0 \times 1+2 \times 3 \times 4 \times 5+6$ 」「 $0 \times 1 \times 2+3 \times 4+5 \times 6$ 」「 $0 \times 1+2 \times 3+4 \times 5 \times 6$ 」「 $0+1 \times 2 \times 3+4 \times 5 \times 6$ 」「 $0+1+2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ 」に変える 6 通り。

(え) ①と④から 1 つずつ「×」を選んで「+」に変えるとき

$1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, \dots, 1 \times 2 \times \dots \times 6$ を 7 で割った余りはそれぞれ 1, 2, 6, 3, 1, 6 であり、

$1 \times 2 \times \dots \times 6, \dots, 4 \times 5 \times 6, 5 \times 6, 6$ を 7 で割った余りはそれぞれ 6, 6, 3, 1, 2, 6 であることに注意して、

①の中で左から k 番目にある「×」を A_k とし、④の中で左から k 番目にある「×」を B_k とすると、 S が 7 の倍数となるような記号の選び方は、 $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_6), (A_3, B_4), (A_5, B_1), (A_5, B_2), (A_5, B_6), (A_6, B_4)$ の 8 通り。

(あ), (い), (う), (え) 以外の方法では S は 7 の倍数にならないことに注意して、求める場合の数は、

$49 + 5 + 6 + 8 = \boxed{68}$ 通り

【問題 2】

a, b を積が 10000 の正の整数とすると、

$$\frac{a^5}{a^4 - 10000a^2 + 100000000} + \frac{b^5}{b^4 - 10000b^2 + 100000000} = \frac{a^5}{a^4 - a^3b + a^2b^2} + \frac{b^5}{b^4 - ab^3 + a^2b^2}$$
$$= \frac{a^3}{a^2 - ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 - ab + a^2} = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} = a + b \text{ となる。}$$

よって、求める和を S とすると、10000 の正の約数を積が 10000 の 2 数をペアにして考えて上記の事実を用いることで、 S は $10000 = 2^4 \times 5^4$ の正の約数の和に一致するとわかる。

$$\text{よって、} S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) = 31 \times 781 = \boxed{24211}$$

【問題 3】

条件を満たす正の数 a, b, c, d, e があったとすると、 $a + b, a + c, \dots, d + e$ の和の一の位は $0 + 1 + \dots + 9$ の一の位である 5 に一致するので、 $4(a + b + c + d + e)$ の一の位は 5 である。…①

一方で、 $a + b, b + c, c + d, d + e, e + a$ は整数なので、これらの和の $2(a + b + c + d + e)$ は整数なので、 $4(a + b + c + d + e)$ は偶数となり、これは、① に矛盾する。

以上より、条件を満たす正の数 a, b, c, d, e は存在しない。

【問題 4】

六角形 ABCDEF の内接円を O とし、円 O の半径を r とする。

A, B, C, D, E, F から円 O へ引いた接線の長さをそれぞれ a, b, c, d, e, f とすると、

$AB + CD + EF = (a + b) + (c + d) + (e + f)$, $BC + DE + FA = (b + c) + (d + e) + (f + a)$ より、 $AB + CD + EF = BC + DE + FA$ となる。

よって、 $\triangle PAB, \triangle RCD, \triangle TEF$ の周の長さが 64 であることから、 $PR + RT + TP = 64$ となり、

$\triangle QBC, \triangle SDE, \triangle UFA$ の周の長さが 81 であることから、 $QS + SU + UQ = 81$ となる。

また、六角形 ABCDEF の面積を S とすると、 $(\triangle PRT) : (\triangle QSU) = (S + 60) : (S + 111)$ となるが、

一方で、 $(\triangle PRT) : (\triangle QSU) = \frac{(PR + RT + TP)r}{2} : \frac{(QS + SU + UQ)r}{2} = 64 : 81$ なので、

$$(S + 60) : (S + 111) = 64 : 81$$

$$\text{よって、} 64(S + 111) = 81(S + 60) \text{ より、} 17S = 2244 \text{ となるので、} S = \boxed{132}$$

【問題 5】

以下、駒を置くマス黒で塗り、駒を置かないマス白で塗ることにする。

異なる 2 つの行について、同じ色で塗られている列の個数を a とし、異なる色で塗られている列の個数を b とすると、この 2 行の中に四隅の 4 マスがある「よい長方形」の個数は、 ab 個となり、

$ab = a(2^n - a) = -(a - 2^{n-1})^2 + 2^{2n-2}$ は $a = b = 2^{n-1}$ のとき、最大値 2^{2n-2} をとる。

よって、どの異なる 2 つの行についても同じ色で塗られている列の個数と異なる色で塗られている列の個数が一致するような塗り方 (以下、このような塗り方を「よい塗り方」と呼ぶことにする) が構成出来れば、このとき、「よい長方形」の個数は最大となり、求める最大値は、 $2^{2n-2} \times {}_{2^n}C_2 = 2^{2n-2} \times \frac{2^n(2^n - 1)}{2} = 2^{3n-3}(2^n - 1)$ 個となる。

以下、 $2^n \times 2^n$ のマスに対し、「よい塗り方」が存在することを示す。

まず、 $n = 1$ のとき、左上のマス黒く塗ることで、「よい塗り方」となる。

また、 $2^k \times 2^k$ のマスについて、「よい塗り方」があったとすると、以下の図のように、その盤面を右と下にくっつけたうえで、右下には白と黒を反転させた盤面をくっつけることで、 $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ のマスに対し、「よい塗り方」が作れる。

($\because$ 上から 2^k 行目までの異なる 2 行または下から 2^k 行目までの異なる 2 行を選んだとき、左から 2^k 列目までについては同じ色で塗られている列と異なる色で塗られている列の個数は同数であり、右から 2^k 列目までについても同じ色で塗られている列と異なる色で塗られている列の個数は同数である。また、上から 2^k 行目までと下から 2^k 行目から 1 行ずつ選んだ場合、左から 2^k 列目まではどの列も同じ色で塗られており、右から 2^k 列目まではどの列も異なる色で塗られている。)

以上より、 $2^n \times 2^n$ のマスに対し、「よい塗り方」が存在するので、求める最大値は $2^{3n-3}(2^n - 1)$

