

広中杯 2025Jr トライアル 解答

【問題 1】

長方形の面積が 2025 であり、二辺の長さは整数なので、長方形の二辺の長さの組は

$\{1, 2025\}, \{3, 675\}, \{5, 405\}, \{9, 225\}, \{15, 135\}, \{25, 81\}, \{27, 75\}, \{45, 45\}$ に限られる。

このうち、長方形の周の長さが 212 になる、すなわち、長方形の二辺の長さの和が 106 になるのは長方形の長い方の辺の長さが 81 であり、短い方の辺の長さが $\boxed{25}$ のとき。

【問題 2】

$1, 2, \dots, 10$ から異なる 2 つを選んで消し、その 2 数の積を書き加えて得られる 9 つの数は、選んだ 2 数の積が 11 以上であれば条件を満たす。そのような 2 数の選び方は、 $\{2, 6\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{2, 9\}, \{2, 10\}$ の 5 通りと $3, 4, \dots, 10$ から異なる 2 つを選ぶ ${}_8C_2 = 28$ 通りの計 33 通り。

また、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ に積が 720 で 8 以上の異なる 2 つの整数の組 $\{12, 60\}, \{15, 48\}, \{16, 45\}, \{18, 40\}, \{20, 36\}, \{24, 30\}$ を付け加えた 6 通りも条件を満たす。

さらに、 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ も条件を満たすので、 $\boxed{(\text{う}) A \geq 40}$ となる。

【問題 3】

線分 AB が立方体の辺となるときの、A と B を頂点に持つ面は 2 つあり、A に集まる 3 つの面に書かれた数の積と B に集まる 3 つの面に書かれた数の積は等しいので、A を頂点にもつが B を頂点にもたない面に書かれた数と B を頂点にもつが A を頂点にもたない面に書かれた数が一致することになる。

よって、AB は立方体の辺とならず、同様に、BC も CA も立方体の辺にならない。… ①

さらに、AB が立方体の対角線となったとすると、①を満たすように点 C をとることが出来ないので、AB は立方体の対角線とならず、同様に、BC も CA も立方体の対角線にならない。

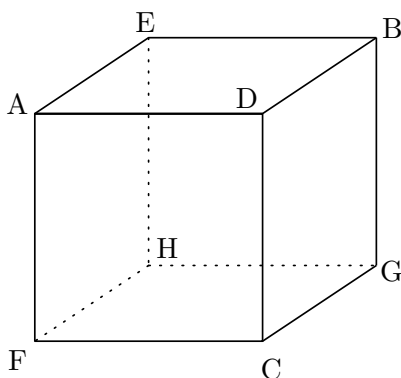
以上より、3 点 A, B, C は以下のような配置となり、以下の図において、面 BDCG, CDAF, ADBE, AEFH, BEHG, CFHG に書かれた数をそれぞれ、 p, q, r, s, t, u とすると、 $qrs = prt = pqu \dots$ ② となる。

よって、②を満たす相異なる正の整数 p, q, r, s, t, u について、 $pqrst u$ の最小値を求めればよい。

p, q, r, s, t, u の中に 5 以上の素数で割り切れる数がないとき、 p, q, r, s, t, u が $1, 2, 3, 4, 6, 8$ の並べ替えのときに $pqrst u$ が最小となるときで、実際、 $(p, q, r, s, t, u) = (1, 3, 4, 2, 6, 8)$ のとき、条件を満たす。

p, q, r, s, t, u の中に 5 以上の素数 n で割り切れる数があると、②より、 p, q, r, s, t, u の中に n の倍数は 2 個以上あるので、 $pqrst u \geq 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times n \times 2n > 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 8$ となる。

以上より、求める最小値は、 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 8 = \boxed{1152}$



【問題 4】

$a, b, \dots, h$ の中に 11 以上の数があったとすると、 $a^3 + b^3 + \dots + g^3 + h^5 \geq 11^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 6^3 + 7^3 + 1^5 = 2115$ となるので、 $a, b, \dots, h$ は 10 以下である。また、 $5^5 = 3125$ より、 h は 4 以下である。

ここで、 $1, 2, \dots, 10$ のうち、 $a, b, \dots, g, h$ に使われていない 2 数を p, q とし、 $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3 = 3025$ から $a^3 + b^3 + \dots + g^3 + h^5 = 2025$ を引くと、 $p^3 + q^3 + h^3 - h^5 = 1000 \dots \textcircled{1}$ となる。

$h = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $p^3 + q^3 = 1000$ となるが、以下の表より、このような p, q は存在しない。

$h = 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $p^3 + q^3 = 1024$ となるが、以下の表より、このような p, q は存在しない。

$h = 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $p^3 + q^3 = 1216$ となるが、以下の表より、 $(p, q) = (6, 10), (10, 6)$ となる。

$h = 4$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、 $p^3 + q^3 = 1960$ となるが、以下の表より、このような p, q は存在しない。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

以上より、 $h = 3$ であり、 $a, b, \dots, g$ は $1, 2, 4, 5, 7, 8, 9$ の並べ替えとなり、 $a + b + \dots + h = \boxed{39}$

【問題 5】

以下の図のように一辺の長さが 1 の正三角形格子に埋め込んで考え、図のように、正三角形の頂点に文字をおく。

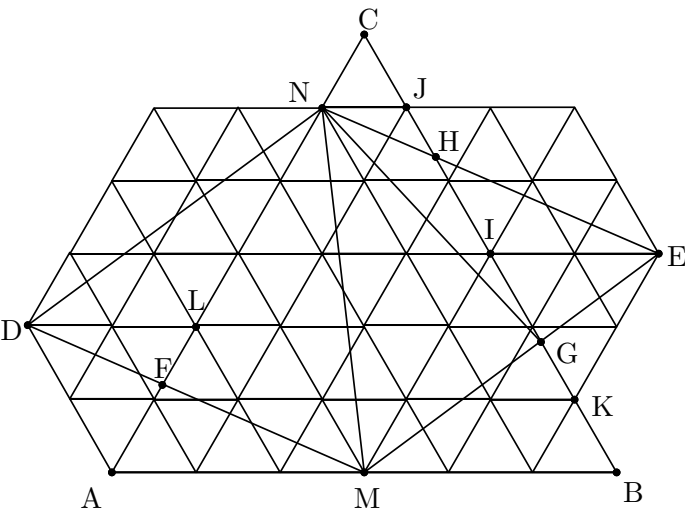
$JH : HI = NJ : IE = 1 : 2$ より、 $HI = \frac{4}{3}$ であり、 $IG : GB = IE : BM = 2 : 3$ より、 $IG = \frac{6}{5}$ なので、

$$(\triangle EGH) : (\triangle EIK) = GH : IK = \left(\frac{4}{3} + \frac{6}{5}\right) : 2 = 19 : 15$$

よって、一辺の長さが 1 の正三角形の面積を a とすると、 $(\triangle EIK) = 4a$ より、 $(\triangle EGH) = \frac{76}{15}a$

$MF : FD = AM : DL = 3 : 2$, $MG : GE = BM : IE = 3 : 2$ より、2 点 F, G は MN について対称なので、 $\triangle DFN \equiv \triangle EGN$ であり、 $NH : HE = NJ : IE = 1 : 2$ より、 $(\triangle DFN) = (\triangle EGN) = \frac{3}{2}(\triangle EGH)$ となる。

よって、 $(\triangle DFN) + (\triangle EGH) = \frac{5}{2}(\triangle EGH) = \frac{38}{3}a$ であり、これは、 $(\triangle ABC) = 36a$ の $\boxed{\frac{19}{54} \text{ 倍}}$



【問題 6】

- (i) 隣り合う 2 つの数字をつなげた数を 2 桁の整数とみると、12, 13, 21, 23, 31, 32 が 1 つずつ現れる 7 桁の整数を良い数と呼ぶことにする。良い数のうち、上 2 桁が 12 なのは 1213231, 1231321, 1232131 の 3 通り。

この 3 通りの良い数それぞれに対し、1, 2, 3 を 1 つずつ選び、それぞれを 11, 22, 33 に変えてばらばら数を得る方法は $3 \times 2 \times 2 = 12$ 通りずつある。よって、上 2 桁が 12 である良い数に対し、このようにしてばらばら数を得る方法は $12 \times 3 = 36$ 通りある。

上 2 桁が 13, 21, 23, 31, 32 の良い数からばらばら数を得る方法も同様に $12 \times 3 = 36$ 通りずつあり、この方法でばらばら数が過不足なく得られることに注意して、ばらばら数の個数は $36 \times 6 = \boxed{216 \text{ 個}}$

- (ii) 対称性より、一の位が 1 のばらばら数と 2 のばらばら数と 3 のばらばら数の個数は等しいので、ばらばら数の一の位の平均は 2 である。同様に、ばらばら数の十の位の平均, 百の位の平均, $\dots$, 十億の位の平均も全て 2 である。よって、ばらばら数の平均は $\boxed{2222222222}$

【問題 7】

コインとコインの間に境界線を引き、その境界線を左から順に、 $l_1, l_2, \dots, l_8$ とする。「 $l_1, l_2, \dots, l_8$ から異なる 2 本の境界線を選び、その間にあるコインを裏返す」という操作を 4 回繰り返す。この操作により、選んだ境界線の両隣にあるコインの表裏は一致するか否かが変化し、選ばなかった境界線の両隣にあるコインの表裏は一致するか否かが変化しない。よって、4 回の操作でどの境界線についても境界線の両隣にあるコインの表裏が一致する状態から一致していない状態になるのは、4 回の操作で $l_1, l_2, \dots, l_8$ を 1 回ずつ選ぶときなので、求める場合の数は、 ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = \boxed{2520 \text{ 通り}}$

【問題 8】

長方形 ABCD の対角線の交点を O とすると、 $OA = OB = OC = OD$ より、O は長方形 ABCD の外接円の中心である。ここで、O から AB, CD に下ろした垂線の長さの和と P から AB, CD に下ろした垂線の長さの和は一致することに注意して、 $(\triangle OAB) + (\triangle OCD) = (\triangle PAB) + (\triangle PCD)$ となるので、

(扇形 OAB の面積) + (扇形 OCD の面積) = $15 + 19 = 34$ となり、これは円 O の面積 72 の $\frac{17}{36}$ 倍である。…①

一方で、 $\angle ACB = \angle DBC = a$ とおくと、 $\angle AOB = \angle COD = 2a$ なので、 $\frac{4a}{360^\circ} = \frac{17}{36}$ より、 $a = \boxed{\frac{85^\circ}{2}}$

【問題 9】

一般に、正の整数 N, k に対し、 N を $2k+1$ で割った余りが k のとき、整数 q を用いて $N = (2k+1)q + k$ と表せるので、 $2N+1 = (2N+1)(2k+1)q + 2k+1$ より、 $2N+1$ は $2k+1$ の倍数である。逆に、 $2N+1$ が $2k+1$ の倍数のとき、整数 q を用いて $2N+1 = q(2k+1)$ と表せ、 $2N+1$ と $2k+1$ は奇数なので、 q も奇数となり、整数 m を用いて $q = 2m+1$ と表せる。 $2N+1 = (2m+1)(2k+1) = 2m(2k+1) + 2k+1$ より、 $N = m(2k+1) + k$ となり、 N を $2k+1$ で割った余りは k となる。

以上より、A, B, $\dots$, G の発言は「 $2N+1$ は 3 の倍数」, 「 $2N+1$ は 5 の倍数」, $\dots$, 「 $2N+1$ は 15 の倍数」と言い換えられる。

A が嘘をついているとすると、G も嘘をついていることになるので、A は本当のことを言っている。…①

B が嘘をついているとすると、G も嘘をついていることになるので、B は本当のことを言っている。…②

①②より、 $2N+1$ は 3 の倍数かつ 5 の倍数なので、 $2N+1$ は 15 の倍数となり、G も本当のことを言っている。

C のみが嘘をついているのは $2N + 1$ が $3, 5, 9, 11, 13, 15$ の倍数であり、 7 の倍数でないとき。

このとき、 N の最小値は、 $2N + 1 = 3^2 \times 5 \times 11 \times 13 = 6435$ より、 $N = 3217$

D のみが嘘をついているのは $2N + 1$ が $3, 5, 7, 11, 13, 15$ の倍数であり、 9 の倍数でないとき。

このとき、 N の最小値は、 $2N + 1 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 15015$ より、 $N = 7507$

E のみが嘘をついているのは $2N + 1$ が $3, 5, 7, 9, 13, 15$ の倍数であり、 11 の倍数でないとき。

このとき、 N の最小値は、 $2N + 1 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 = 4095$ より、 $N = 2047$

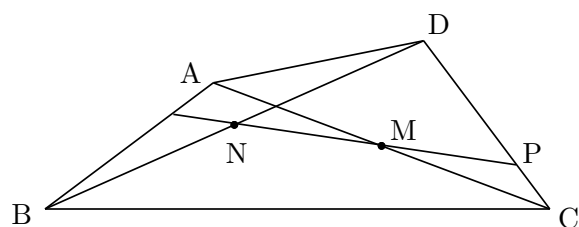
F のみが嘘をついているのは $2N + 1$ が $3, 5, 7, 9, 11, 15$ の倍数であり、 13 の倍数でないとき。

このとき、 N の最小値は、 $2N + 1 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 3465$ より、 $N = 1732$

(i) 以上より、嘘をついている可能性がないのは A, B, G の 3 人。 (ii) N の最小値は 1732

【問題 10】

$AM = CM$ より、 $(\triangle APN) = (\triangle CPN) \cdots \textcircled{1}$ であり、 $BN = DN$ より、 $(\text{四角形 } ABPN) = (\text{四角形 } ADPN) \cdots \textcircled{2}$ によって、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、 $(\triangle ABP) = (\text{四角形 } ADCN)$ であり、 $BN = DN$ より、 $(\text{四角形 } ADCN) = (\text{四角形 } ABCN)$ なので、四角形 $ABCD$ の面積を S とおくと、 $(\triangle ABP) = \frac{1}{2}S$ となる。



ここで、 $DA = DC$ より、 $\angle DAC = \angle DCA = a$ とおくと、 $\angle ADE = 45^\circ - a$ となるので、

$\angle ADB + \angle ACD + (\angle ECD + \angle EDC) = (45^\circ - a) + a + 45^\circ = 90^\circ$ なので、 $\triangle ABD \equiv \triangle EDB$ となるように、直線 BD に関して A と同じ側に点 F をとると、四角形 $BCDF$ は $DF = 4, BC = 9, BF = CD, \angle FBC + \angle BCD = 90^\circ$ であり、面積が S の四角形となる。四角形 $BCDF$ を以下の図のよう 4 つくっつけることで、一辺 9 の正方形から一辺 4 の正方形をくり抜いた形が出来るので、 $4S = 9^2 - 4^2 = 65$ であり、 $\triangle ABP = \frac{S}{2} = \frac{65}{8}$

