

広中杯 2025 トライアル 解答

【問題 1】

I – (1)

1, 2, ..., 10 から異なる 2 つを選んで消し、その 2 数の積を書き加えて得られる 9 つの数は、選んだ 2 数の積が 11 以上であれば条件を満たす。そのような 2 数の選び方は、 $\{2, 6\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{2, 9\}, \{2, 10\}$ の 5 通りと 3, 4, ..., 10 から異なる 2 つを選ぶ ${}_8C_2 = 28$ 通りの計 33 通り。

また、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ に積が 720 で 8 以上の異なる 2 つの整数の組 $\{12, 60\}, \{15, 48\}, \{16, 45\}, \{18, 40\}, \{20, 36\}, \{24, 30\}$ を付け加えた 6 通りも条件を満たす。

さらに、 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ も条件を満たすので、(う) $A \geq 40$ となる。

I – (2)

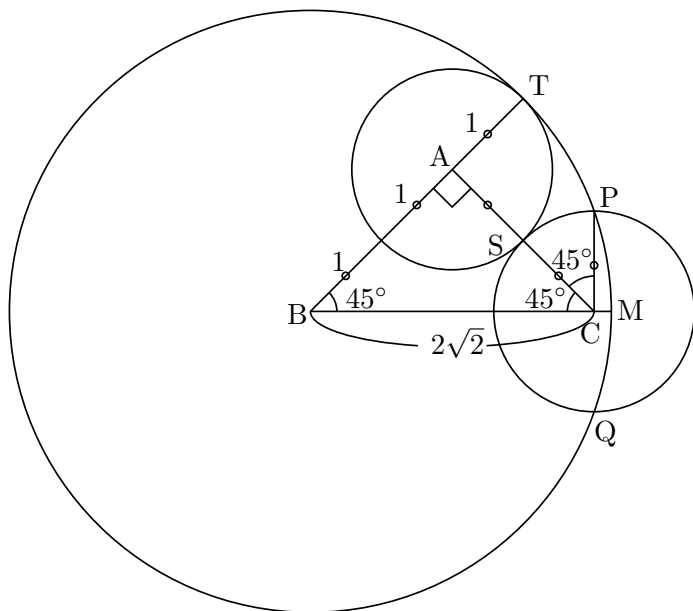
x が $-4 \leq x \leq 9$ を満たす整数のとき、 $(x+50)^2 = x^2 + 100x + 2500 = 100(x+25) + x^2$ であり、 $0 \leq x^2 \leq 99$ であることに注意して、 $(x+50)^2$ の下二桁以外を取り除いた数は x^2 となる。よって、 $46^2, 47^2, \dots, 59^2$ は下二桁以外を取り除いた数は平方数である。また、 $60^2 = 3600$ の下二桁以外を取り除いた数は 0 なので 3600 は条件を満たさず、 $61^2 = 3721$ の下二桁以外を取り除いた数は 21 なので、問題文の条件を満たす。以上より、 2025 より大きい条件を満たす平方数のうち、最小のものは $\boxed{3721}$

I – (3)

AB の長さ と 2 円 O, O_1 の半径の差は等しいので、2 円 O, O_1 は接し、AC の長さ と 2 円 O_1, O_2 の半径の和は等しいので、2 円 O_1, O_2 は接する。2 円 O, O_1 の接点を T とし、2 円 O_1, O_2 の接点を S とし、弧 PQ の中点を M とする。特に、 $BC = 2\sqrt{2}$ 、 $CP = 1$ 、 $BP = 3$ より、 $\angle BCP = 90^\circ$ となることに注意すると、以下の図のようになり、

$$\begin{aligned} a &= (\triangle BCP) + (\text{扇形 BPT}) - (\triangle ABC) - (\text{扇形 AST}) - (\text{扇形 CPS}) \\ &= \sqrt{2} + (\text{扇形 BMT}) - (\text{扇形 BMP}) - 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + \frac{9}{8}\pi - \frac{b}{2} - 2 - \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{4}\pi - 2 + \sqrt{2} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $2a + b = \boxed{\frac{3}{2}\pi - 4 + 2\sqrt{2}}$



I - (4)

コインとコインの間に境界線を引き、その境界線を左から順に、 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_8$ とする。「 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_8$ から異なる 2 本の境界線を選び、その間にあるコインを裏返す」という操作を 4 回繰り返す。この操作により、選んだ境界線の両隣にあるコインの表裏は一致するか否かが変化し、選ばなかった境界線の両隣にあるコインの表裏は一致するか否かが変化しない。よって、4 回の操作でどの境界線についても境界線の両隣にあるコインの表裏が一致する状態から一致していない状態になるのは、4 回の操作で $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_8$ を 1 回ずつ選ぶときなので、求める場合の数は、 ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = \boxed{2520 \text{ 通り}}$

I - (5)

BC の B 側の延長上に点 X をとり、C 側の延長上に点 Y をとる。接弦定理より、 $\angle ADB = \angle ABX$ なので、 $\angle BDC = \angle CBE$ となり、同様に、 $\angle BCD = \angle CEB$ となるので、 $\triangle BCD \sim \triangle CEB \dots \textcircled{1}$

ここで、円 O_1 の中心を P とし、円 O_2 の中心を Q とすると、円周角の定理より、 $\angle BPD = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle CQE$ であり、二等辺三角形 PBD と二等辺三角形 CQE は相似。その相似比は円 O_1 と円 O_2 の半径の比の $8:7$ に等しいので、 $BD = 8x, CE = 7x$ とおける。

①より、 $BD:BC = CB:CE$ であり、 $8x:BC = BC:7x$ より、 $BC = 2\sqrt{14}x$ となる。

よって、①より、 $CE:EB = BC:CD$ なので、 $7x:6 = 2\sqrt{14}x:CD$ より、 $CD = 2\sqrt{14}x \times \frac{6}{7x} = \boxed{\frac{12\sqrt{14}}{7}}$

【問題 2】

II - (1)

$a, b, \dots, h$ の中に 11 以上の数があったとすると、 $a^3 + b^3 + \dots + g^3 + h^5 \geq 11^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 6^3 + 7^3 + 1^5 = 2115$ となるので、 $a, b, \dots, h$ は 10 以下である。また、 $5^5 = 3125$ より、 h は 4 以下である。

ここで、 $1, 2, \dots, 10$ のうち、 $a, b, \dots, g, h$ に使われていない 2 数を p, q とし、 $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3 = 3025$ から $a^3 + b^3 + \dots + g^3 + h^5 = 2025$ を引くと、 $p^3 + q^3 + h^3 - h^5 = 1000 \dots \textcircled{1}$ となる。

$h = 1$ のとき、①より、 $p^3 + q^3 = 1000$ となるが、以下の表より、このような p, q は存在しない。

$h = 2$ のとき、①より、 $p^3 + q^3 = 1024$ となるが、以下の表より、このような p, q は存在しない。

$h = 3$ のとき、①より、 $p^3 + q^3 = 1216$ となるが、以下の表より、 $(p, q) = (6, 10), (10, 6)$ となる。

$h = 4$ のとき、①より、 $p^3 + q^3 = 1960$ となるが、以下の表より、このような p, q は存在しない。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

以上より、 $h = 3$ であり、 $a, b, \dots, g$ は $1, 2, 4, 5, 7, 8, 9$ の並べ替えとなり、 $a + b + \dots + h = \boxed{39}$

II - (2)

$2025^2 + 2025 + 1 = 45^4 + 45^2 + 1 = 45^4 + 2 \times 45^2 + 1 - 45^2 = (45^2 + 1)^2 - 45^2 = (45^2 + 1 + 45)(45^2 + 1 - 45)$ であり、 $45^2 + 1 - 45 = 45 \times (45 - 1) + 1 = 44 \times 45 + 1 = 44 \times (44 + 1) + 1 = 44^2 + 44 + 1$ であることに注意して、 $2025^2 + 2025 + 1 = (45^2 + 45 + 1)(44^2 + 44 + 1)$ となり、 $\boxed{(m, n) = (45, 44)}$ が答えの 1 つとわかる。

(他に、条件を満たす (m, n) は $(m, n) = (44, 45)$ のみである。)

II - (3)

与式を上から順に $2a^2bc, 3b^2cd, 4c^2da, 5d^2ab$ で割ると、

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1} \\ \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{3} \dots \textcircled{2} \\ \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{4} \dots \textcircled{3} \\ \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{5} \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \text{より、} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = \frac{3}{4} \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{4} \text{より、} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) = \frac{8}{15} \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{6} \text{より、} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{77}{60} \text{なので、} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{\sqrt{77}}{2\sqrt{15}} = \boxed{\frac{\sqrt{1155}}{30}}$$

II - (4)

点 B は $\triangle ACE$ の内接円 O_1 の中心なので、 $\angle ACB = \angle ECB = \theta$ とおけ、BD は円 O の直径なので、

$\angle BCD = 90^\circ$ であるから、 $\angle ADC = 90^\circ - \theta$ となる。ここで、EC の C 側の延長上に F をとると、

$$\angle DCF = 180^\circ - \angle BCE - \angle BCD = 180^\circ - \theta - 90^\circ = 90^\circ - \theta \text{より、} \angle ACD = \angle FCD \dots \textcircled{1}$$

同様に、EA の A 側の延長上に G をとると、 $\angle CAD = \angle GAD \dots \textcircled{2}$ となり、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より、D は線分 AC と半直線 CF と半直線 AG が接する円 O_2 の中心。以上より、2 円 O_1, O_2 は EA と EC に接する円なので、2 点 B, D は $\angle AEC$ の二等分線上にある。

ここで、3 点 A, C, E から円 O_1 へ引いた接線の長さをそれぞれ p, q, r とし、2 点 A, C から円 O_2 へ引いた接線の長さをそれぞれ x, y とし、円 O_2 と EA, EC の接点をそれぞれ X, Y とすると、 $EX = EY$ より、

$r + p + x = r + q + y$ なので、 $p - q = y - x$ となる。よって、 $AC = p + q = x + y$ であることを加味して、

$$p = y, q = x \text{ となるので、} EX = EY = r + p + x = r + p + q = (\triangle ACE \text{ の周の長さの半分}) = \frac{DE}{2}$$

よって、 $\angle DEX = \angle DEY = 60^\circ$ であり、 $\angle EAC + \angle ECA = 60^\circ$ となる。

ここで、B は $\triangle ACE$ の内接円の中心なので、 $\angle BAC + \angle BCA = 30^\circ$ となり、 $\angle ABC = 150^\circ$

また、 $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ より、円 O の中心 O は BD の中点であり、 $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 30^\circ$ より、 $\angle AOC = 60^\circ$ なので、 $\triangle OAC$ は正三角形。

ここで、A から CD に下ろした垂線の足を H とすると、 $AH = 5, DH = 5\sqrt{3}$ となり、 $\triangle ACH$ において、三平方の定理より、 $AC^2 = 5^2 + (11 - 5\sqrt{3})^2 = 221 - 110\sqrt{3}$

$$\text{以上より、円 } O \text{ の面積は、} \pi OA^2 = \pi AC^2 = \boxed{(221 - 110\sqrt{3})\pi}$$

【問題 3】

以下の図において、PF と $\triangle ABC$ の外接円の交点を R とすると、 $\angle AEF = \angle APF = \angle ACR$ より、
 $BF \parallel CR \cdots \textcircled{1}$ となる。また、 $\angle DFP = 180^\circ - \angle DAP = \angle BRP$ より、 $BR \parallel CF \cdots \textcircled{2}$

①②より、四角形 BFCR は平行四辺形となるので、 $QF = QR, QB = QC = 6$

よって、直線 OQ と円 O の交点を S, T とすると、方べきの定理より、 $QS \times QT = QF \times QP = QR \times QP$
 $= QB \times QC = 6 \times 6 = 36$ であり、 $(7-r)(7+r) = 36$ より、 $49 - r^2 = 36$ となるので、 $r = \boxed{\sqrt{13}}$

(注) 一般に、2 円 O_1, O_2 が 2 点 P, Q で交わっており、P を通る直線 ℓ と 2 円 O_1, O_2 の P でない方の交点をそれぞれ A, B とし、Q を通る直線 m と 2 円 O_1, O_2 の Q でない方の交点をそれぞれ C, D とすると、 $AC \parallel BD$ が成り立つことが角を追うことで示せる。よって、以下のような図の位置関係でなくても、①, ②は成り立つ。

