

問題 1

A,B,C の一の位の組み合わせは $(A,B,C) = (1,2,4), (2,4,8), (7,4,8)$ の 3 通りが考えられます。C は 6 桁なので A の十万の位は 1 か 2。A の十万の位が 2 のとき、C の十万の位は 8。このとき A の万の位は 1。ただしこの場合は A,B,C の一の位に当てはまる組み合わせがありません。よって **A の十万の位は 1**。

A の十万の位が 1 のとき、一の位は 2 か 7。ただし、A の一の位が 2 のとき、A,B,C の十の位に当てはまる組み合わせがありません。よって **A の一の位は 7**。このとき A,B,C の十の位として当てはまるのは 5,8 のいずれかです。

A の十の位が 8 のとき、図 1 のように A,B,C の下の位から当てはまる数を入れていくと、万の位に当てはまる数の組み合わせがありません。よって A の十の位は 5 です。

図 1

	十万	万	千	百	十	一
A	1		4	2	8	7
B	2		8	5	7	4
C	5		7	1	4	8

A の十の位が 5 のとき、下の位から順に当てはまる組み合わせを調べていくと、図 2 のように A,B,C が決まります。

図 2

	十万	万	千	百	十	一
A	1	4	2	8	5	7
B	2	8	5	7	1	4
C	5	7	1	4	2	8

答 142857

問題 2

連続する 5 個の整数には 2, 3, 4, 5 の倍数が少なくとも 1 つずつ含まれるので、B はこれらを組み合わせた積で必ず割り切れます。よって、連続する 5 個の整数の中に、7 の倍数、9 の倍数(または 3 の倍数が 2 個)、11 の倍数、13 の倍数、17 の倍数、19 の倍数が含まれるように A を選びます。また B が 16 で割り切れるためには、A は偶数か、連続する 5 個の整数の中に 8 の倍数が含まれている必要があります。

まず連続する 5 個以内の整数の中に、17 の倍数、19 の倍数が含まれる組み合わせを調べると、
 $(17, 18, 19), (34, 35, 36, 37, 38), (133, 134, 135, 136), (152, 153), (170, 171), \dots$ などが見つかります。

これらを含む連続する 5 個の整数の中に、7 の倍数、11 の倍数、13 の倍数を含むように数を選ぶと、最も小さい組み合わせは $(152, 153, 154, 155, 156)$ 。この積は 16 でも割り切れ、最大で 22 まで割り切れます。

答 152

問題 3

最初に、三角形 ABG と三角形 AEC に着目します。

$AB = AE$, $AG = AC$ 。また $\angle BAG = \angle EAC = \angle BAC + 90^\circ$ より、
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、**三角形 ABG と三角形 AEC は合同**です。

図 1

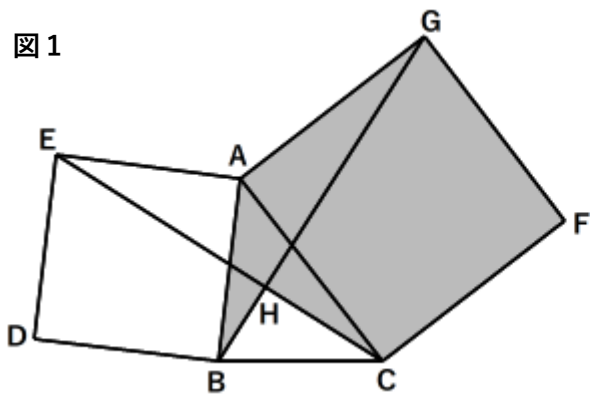


図 2

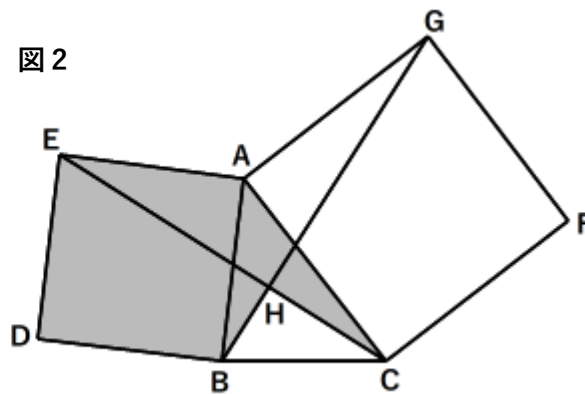


図 1,2 の色のついた部分の面積の差について考えます。

(四角形 CFGH) - (四角形 BDEH)

= (四角形 CFGH + 三角形 ABG) - (四角形 BDEH + 三角形 AEC)

= (正方形 ACFG + 凹四角形 ABHC) - (正方形 ABDE + 凹四角形 ABHC)

= (正方形 ACFG) - (正方形 ABDE) = $25 \times 25 - 20 \times 20 = 625 - 400 = 225\text{cm}^2$

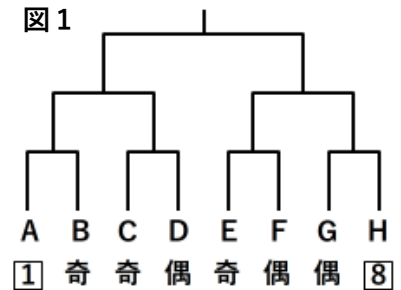
よって (四角形 CFGH) = $225 + (\text{四角形 BDEH}) = 225 + 321 = 546\text{cm}^2$ 。

答 546cm^2

問題 4

①は偶数に必ず負けるので、①が優勝するためには、1～3 回戦ですべて奇数(③,⑤,⑦のいずれか)と当たる必要があります。

まず図 1 のように $A = \text{①}$ で B, C, E を奇数(③,⑤,⑦のいずれか)とします。また奇数(③,⑤,⑦)は⑧に必ず負けるので、⑧が奇数と当たらないように $H = \text{⑧}$ とします。奇数(③,⑤,⑦)が勝ち上がって①と当たり、①が優勝するための D, F, G (②,④,⑥)の組み合わせを考えます。



$(B, C, E) = (\text{③}, \text{⑤}, \text{⑦})$ の場合。

$(D, F, G) = (\text{②}, \text{④}, \text{⑥}), (\text{②}, \text{⑥}, \text{④}), (\text{④}, \text{②}, \text{⑥}), (\text{④}, \text{⑥}, \text{②}), (\text{④}, \text{⑥}, \text{②})$ 4 通り。

$D = \text{⑥}$ の場合は $C = \text{⑤}$ が 1 回戦で負けるので不適。

$(B, C, E) = (\text{③}, \text{⑦}, \text{⑤})$ の場合。

$(D, F, G) = (\text{⑥}, \text{②}, \text{④}), (\text{⑥}, \text{④}, \text{②})$ 2 通り。

$F = \text{⑥}, G = \text{⑥}$ の場合は $E = \text{⑤}$ が 1 回戦か 2 回戦で負けるので不適。

$(B, C, E) = (\text{⑤}, \text{③}, \text{⑦})$ の場合。

$(D, F, G) = (\text{②}, \text{④}, \text{⑥}), (\text{②}, \text{⑥}, \text{④})$ 2 通り。

$D = \text{④}, \text{⑥}$ の場合は $C = \text{③}$ が 1 回戦で負けるので不適。

$(B, C, E) = (\text{⑤}, \text{⑦}, \text{③})$ の場合。

いずれの場合も $E = \text{③}$ が 3 回戦まで勝ち上がれないので不適。

$(B, C, E) = (\text{⑦}, \text{③}, \text{⑤})$ の場合。

$C = \text{③}$ が 1 回戦で負けるか、 $E = \text{⑤}$ が 3 回戦まで勝ち上がれないので不適。

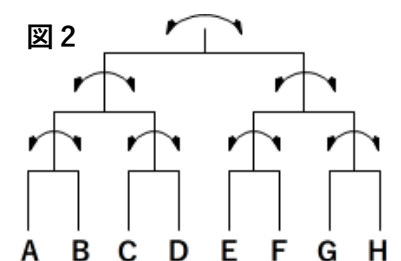
$(B, C, E) = (\text{⑦}, \text{⑤}, \text{③})$ の場合。

いずれの場合も $E = \text{③}$ が 3 回戦まで勝ち上がれないので不適。

以上より、①が優勝するトーナメントの組み合わせは全部で $4 + 2 + 2 = 8$ 通り。

並べ替えは図 2 のように、それぞれ対戦の左右を入れ替えて
1 回戦 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 通り, 2 回戦 $2 \times 2 = 4$ 通り, 3 回戦 2 通り。

よって①が優勝するトーナメントの作り方は全部で
 $8 \times 16 \times 4 \times 2 = 1024$ 通り となります。



答 1024 通り

問題 5

まず D, F, G で他の数を表します。 $B = D + G$, $H = F \times G$ 。 $A = H \times D = (F \times G) \times D = D \times F \times G$ 。

また $A = C \times F$ なので $D \times F \times G = C \times F$ より $C = D \times G$ 。

$E = C - D = D \times G - D$ なので $67 - E = H$ より $67 = H + E = F \times G + D \times G - D$ 。

$A = B + 67$ より $A = (D + G) + (F \times G + D \times G - D) = F \times G + D \times G + G$ 。

また $A = D \times F \times G$ であることから $D \times F \times G = F \times G + D \times G + G$ より $D \times F = F + D + 1$ 。

$D \times F = F + D + 1$ を満たす D, F の組み合わせは $(D, F) = (2, 3), (3, 2)$ のいずれかです。

$(D, F) = (2, 3)$ の場合。

$67 = F \times G + D \times G - D = 3 \times G + 2 \times G - 2 = 5 \times G - 2$ より、 G が整数にならないため不適。

$(D, F) = (3, 2)$ の場合

$67 = F \times G + D \times G - D = 2 \times G + 3 \times G - 3 = 5 \times G - 3$ より $G = 14$ 。よって $D = 3, F = 2$ 。

以上より、他の数もすべて求めることができます。

A 84	=	B 17	+	67
$\div$	$\parallel$	=	-	
C 42	-	D 3	=	E 39
=	+	$\times$	=	
F 2	$\times$	G 14	=	H 28

答

問題 6

2 回目の移動後、C に青は 4 人なので、他の部屋に青は 6 人以下。また 2 回目の移動後、A は青と黄のみで、青が黄より多く、合計 10 人であることから **2 回目の移動後の A は (赤,青,黄)=(0,6,4)**。

このとき **2 回目の移動後の B は (赤,青,黄)=(8,0,2)**。整理すると次のようになります。

	A			B			C		
	赤	青	黄	赤	青	黄	赤	青	黄
最初	10	0	0	0	10	0	0	0	10
1回目後									
2回目後	0	6	4	8	0	2	2	4	4

2 回目の移動後、A に青は 6 人なので、1 回目の移動後、C に青は 6 人以上。

2 回目の移動後、C に黄は 4 人なので、1 回目の移動後、C に黄は 4 人以上。

合計は 10 人であることから **1 回目の移動後の C は (赤,青,黄)=(0,6,4)**。

よって移動は次のように行われたことがわかります。

	A			B			C		
	赤	青	黄	赤	青	黄	赤	青	黄
最初	10	0	0	0	10	0	0	0	10
1回目後	4	0	6	6	4	0	0	6	4
2回目後	0	6	4	8	0	2	2	4	4

2 回目の移動で A から B に移動したのは赤 4 人,黄 2 人です。

答 赤 4 人, 黄 2 人

問題 7

たくさんの水を加えて捨てるよりも、少しの水を加えて、できるだけ濃い食塩水を捨てることをくり返す方が効率的により少ない水で食塩水を薄めることができます。そして例えば、1 杯の水を加えて捨てる

と、濃度は $\frac{24}{25}$ 倍になり、2 杯の水を加えて捨てる、濃度は $\frac{24}{26}$ 倍になることから、濃度を $\frac{1}{10}$ 倍にするた

めに、次の式を満たす $\square$ (25 以上)の組み合わせを考えます。
$$\frac{24}{\square} \times \frac{24}{\square} \times \frac{24}{\square} \times \frac{24}{\square} \times \cdots = \frac{1}{10}$$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$ より、以下の条件に注意します。

$\square$ は 2,3,5 以外の素因数を持たない。 $\square \times \square \times \square \times \cdots$ において素因数の 5 は 1 つ。

このとき $\square = 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, \cdots$ が当てはまります。

加える水の量を最小にするために、できるだけ小さい $\square$ を用いて式を満たす組み合わせを調べます。

$\frac{24}{27} = \frac{8}{9}$ と $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ で $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ となることから、 $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ との積を考えて

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

このとき必要な水の量は $6 + (3 + 8 \times 2) + (3 + 8 \times 2) + (3 + 8 \times 2) = 63$ 杯。

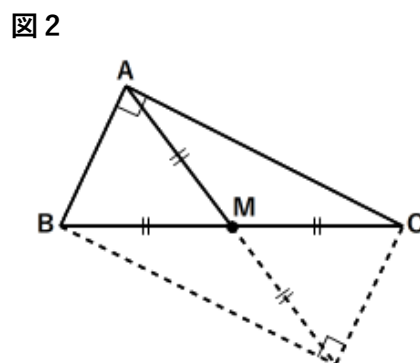
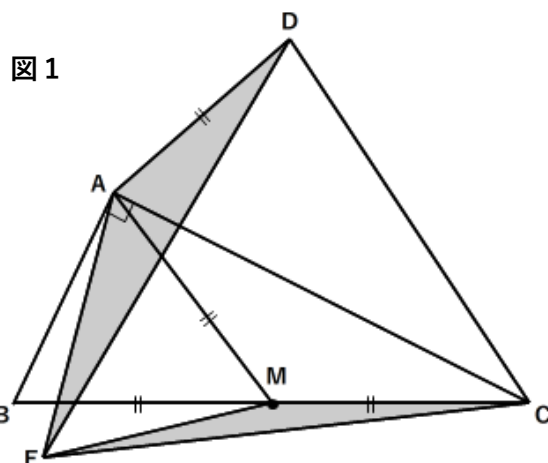
例えば $\square = 36$ のとき、 $36 - 24 = 12$ 杯の水を使って濃度を $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ にすることができますが、

$\frac{2}{3} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$ であることから、 $\frac{8}{9}$ と $\frac{3}{4}$ を組み合わせの方が 11 杯で、より少ない水で済むため、 $\square = 36$ は考

える必要がありません。 $\square = 40, 45, 48, \cdots$ も同様です。よって 63 杯が最小です。

答 63 杯

問題 8



BC の真ん中の点を点 M とします。図 2 のような長方形を考えると AM は対角線の半分の長さなので、 $AM = BM = CM$ であることがわかります。

次に図 1 のように、三角形 ECD が正三角形になるように点 E をとります。

※ 問題の図が正確ではないため、解説の図 1 も正確ではありません。

角 $EDA = \text{角 } ECM (=4^\circ)$, $DA = CM$, $ED = EC$ なので、**三角形 EDA と三角形 ECM は合同。**

このとき $EA = EM$, 角 $AED = \text{角 } MEC$ より 角 $AEM = \text{角 } DEC - \text{角 } MEC + \text{角 } AED = \text{角 } DEC = 60^\circ$ 。

よって**三角形 AEM は正三角形**です。

三角形 ADC と三角形 AEC に着目します。

三角形 ECD は正三角形なので $DC = EC$ 。三角形 AEM は正三角形なので $AD = AE$ 。

また AC は共通なので、**三角形 ADC と三角形 AEC は合同。**

このとき AC は角 DCE をちょうど二等分にするので、角 $DCA = 60 \div 2 = 30^\circ$ 。

よって 角 $DAC = 180 - (64 + 30) = 86^\circ$ であることがわかります。

答 86 度