

問題 1

式①の答えは 2 桁なので、式①は足し算、かけ算のいずれかです。

また式③が成り立つことから、エは 8 以下、アは 7 以下です。

式①の答えの十の位をオとして考えます。

式①が足し算の場合。

オ=1。アは 7 以下なので (ア,イ)=(6,4), (7,3) のいずれかです。(ア,イ)=(7,3) のとき ウ=1 ですが、オ=1 であるため不適。よって (ア,イ)=(6,4), ウ=2, エ=8 に決まります。このとき式③は $9-8=1$ となりますが、オ=1 より不適。よって式①はかけ算です。

式①がかけ算の場合。

アは 7 以下なので、式①は $5 \times 2=10$, $5 \times 4=20$, $6 \times 5=30$ のいずれかです。(ア,イ)=(5,2) のとき オ=1 より ウ=3, エ=8。このとき式③は $9-8=1$ となりますが、オ=1 より不適。(ア,イ)=(6,5) のとき、図 1,2 の場合が考えられますが、いずれも式②が成立しません。

図 1

$$\begin{array}{l} \text{式①} \quad \boxed{6} \times \boxed{5} = \boxed{3} \boxed{0} \\ \text{式②} \quad \boxed{1} + \boxed{} = \boxed{} \\ \text{式③} \quad \boxed{9} - \boxed{7} = \boxed{2} \end{array}$$

図 2

$$\begin{array}{l} \text{式①} \quad \boxed{6} \times \boxed{5} = \boxed{3} \boxed{0} \\ \text{式②} \quad \boxed{2} + \boxed{} = \boxed{} \\ \text{式③} \quad \boxed{9} - \boxed{8} = \boxed{1} \end{array}$$

よって (ア,イ)=(5,4)。

このとき式①～③は図 3 の場合に成立します。

図 3

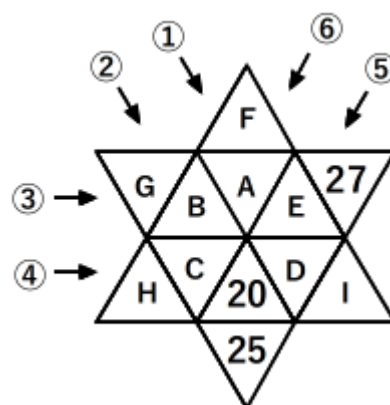
$$\begin{array}{l} \text{式①} \quad \boxed{5} \times \boxed{4} = \boxed{2} \boxed{0} \\ \text{式②} \quad \boxed{1} + \boxed{7} = \boxed{8} \\ \text{式③} \quad \boxed{9} - \boxed{6} = \boxed{3} \end{array}$$

答 ア 5, イ 4, ウ 1, エ 6

問題 2

18～29 の合計は $(18+29) \times 12 \div 2 = 282$ 。

図のように 1 列に並ぶ数を①～⑥とします。



(1)

③+④ = $118 \times 2 = 236$ より $F + 25 = 282 - 236 = 46$ 。

よって $F = 46 - 25 = 21$ 。

(2)

①+② = $118 \times 2 = 236$ より $H + 27 = 282 - 236 = 46$ 。よって $H = 46 - 27 = 19$ 。

残りの数で和が 46 になる組み合わせは $18 + 28, 22 + 24$ なので $G = 18, 22, 24, 28$ のいずれかです。

②から $G + B + C = 118 - (20 + 25) = 73$ 。⑥から $A + B + C = 118 - (21 + 19) = 78$ 。

よって $A - G = (A + B + C) - (G + B + C) = 78 - 73 = 5$ 。

$G = 18$ のとき $A = 23$ 。このとき $B = 26, C = 29, D = 22, E = 24, I = 28$ で条件を満たします。

$G = 22$ のとき $A = 27$ より不適。

$G = 24$ のとき $A = 29$ 。ただし $B + E = 118 - (24 + 29 + 27) = 38$ となり、これを満たす B, E の組み合わせはないので不適。

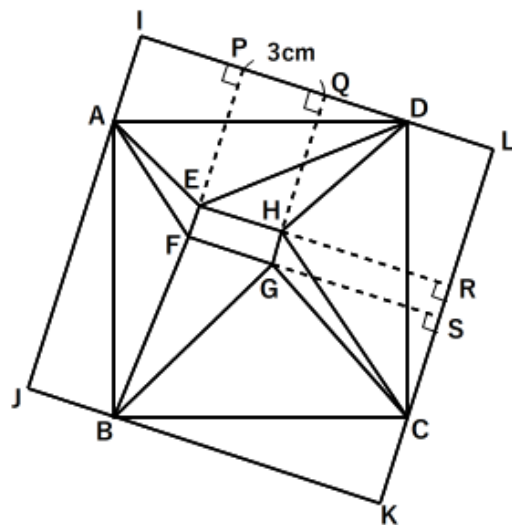
$G = 28$ のとき $A = 33$ より不適。

以上より $A = 23$ 。

答 (1) 21 (2) 23

問題 3

図のように、長方形 EFGH と各辺が平行な正方形 IJKL で正方形 ABCD を囲み、直線 EF, HG と IL との交点を P, Q とします。また直線 EH, FG と LK の交点を R, S とします。



$$\begin{aligned}
 & \text{三角形 AEF} + \text{三角形 CGH} \\
 &= EF \times PI \div 2 + GH \times QL \div 2 \\
 &= 1 \times PI \div 2 + 1 \times QL \div 2 \\
 &= PI \div 2 + QL \div 2 \\
 &= (PI + QL) \div 2
 \end{aligned}$$

$$(PI + QL) \div 2 = 5\text{cm}^2 \text{ より } PI + QL = 10\text{cm}。$$

$$\text{正方形 IJKL の 1 辺の長さ} = PQ + PI + QL = 3 + 10 = 13\text{cm}。$$

$$\begin{aligned}
 & \text{三角形 BFG} + \text{三角形 DHE} \\
 &= FG \times SK \div 2 + HE \times RL \div 2 \\
 &= 3 \times SK \div 2 + 3 \times RL \div 2 \\
 &= 3 \times (SK + RL) \div 2 \\
 &= 3 \times (LK - RS) \div 2 \\
 &= 3 \times (13 - 1) \div 2 = 3 \times 12 \div 2 = 18\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

答 18cm²

問題 4

D は A の倍数であり、 $D-1$ は B の倍数であり、 $D+1$ は C の倍数です。

言い換えれば、**D は A の倍数かつ、B の倍数+1 かつ、C の倍数-1** です。

A の倍数かつ、B の倍数+1 かつ、C の倍数-1 を満たす整数は 1 から 999 で D だけなので、
 $D + (A, B, C \text{ の最小公倍数})$ は 999 より大きい、すなわち 1000 以上であり、
 $D - (A, B, C \text{ の最小公倍数})$ は 1 より小さい、すなわち 0 以下です。

$D + (A, B, C \text{ の最小公倍数})$ と $D - (A, B, C \text{ の最小公倍数})$ の差は $2 \times (A, B, C \text{ の最小公倍数})$ 。
 1000 以上と 0 以下の差は 1000 以上。
 よって $2 \times (A, B, C \text{ の最小公倍数})$ は 1000 以上なので **A, B, C の最小公倍数は 500 以上**です。

1桁の整数 A, B, C の最小公倍数の最大は $7 \times 8 \times 9 = 504$ で、500 以上はこれだけです。
 よって、A, B, C は 7, 8, 9 のいずれかであることがわかります。

504 をもとに、7, 8, 9 の倍数が連続して並ぶ場合について調べると次のようになります。

	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504
7の倍数	×	×	○	×	×	×	×	×	×	○
8の倍数	×	○	×	×	×	×	×	×	×	○
9の倍数	○	×	×	×	×	×	×	×	×	○

$496 + 504$ は 999 より大きく、 $496 - 504$ は 1 より小さいため、D は 496 です。

また $A=8, B=9, C=7$ となります。

答 A 8, B 9, C 7, D 496

問題 5

(1)

イ. $8 = 2 \times 2 \times 2$ より、 $8[10]$ は「2 を 3 回かけ合わせた数」を 10 回かけ合わせた数です。
よって $8[10] = 2[3 \times 10] = 2[30]$

ウ. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ より、 $16[8]$ は「2 を 4 回かけ合わせた数」を 8 回かけ合わせた数です。
よって $16[8] = 2[4 \times 8] = 2[32]$

$2[30] < 2[31] < 2[32]$ なので小さい順に並べるとイ,ア,ウとなります。

答 イ,ア,ウ

(2)

ア. $9 = 3 \times 3$ より、 $9[22]$ は「3 を 2 回かけ合わせた数」を 22 回かけ合わせた数です。
よって $9[22] = 3[2 \times 22] = 3[44]$

イ. 3 をかけ合わせてできる数で 28 に最も近い数は 27 なので、 $27[15]$ について考えます。
 $27 = 3 \times 3 \times 3$ より、 $27[15]$ は「3 を 3 回かけ合わせた数」を 15 回かけ合わせた数です。
 $27[15] = 3[3 \times 15] = 3[45]$ なので **$28[15]$ は $3[45]$ より大きい数**です。

ウ. 3 をかけ合わせてできる数で 79 に最も近い数は 81 なので、 $81[11]$ について考えます。
 $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ より、 $81[11]$ は「3 を 4 回かけ合わせた数」を 11 回かけ合わせた数です。
 $81[11] = 3[4 \times 11] = 3[44]$ なので **$79[11]$ は $3[44]$ より小さい数**です。

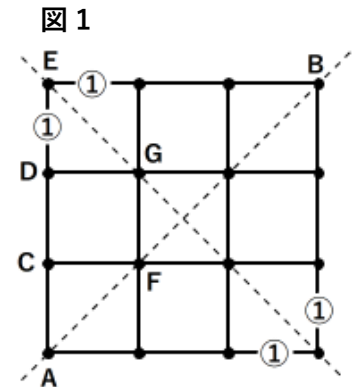
エ. $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ より、 $243[9]$ は「3 を 5 回かけ合わせた数」を 9 回かけ合わせた数です。
よって $243[9] = 3[5 \times 9] = 3[45]$

$79[11] < 9[22] < 243[9] < 28[15]$ なので小さい順に並べるとウ,ア,エ,イとなります。

答 ウ,ア,エ,イ

問題 6

まず道 DE を通って、A から B まで最短距離で行く進み方が何通りあるかを考えます。A→D は 1 通り、E→B も 1 通りなので、**道 DE を通る進み方は $1 \times 1 = 1$ 通り** です。このとき図 1 のように対称性から、他の 3 本の道を通る進み方もすべて 1 通りであることがわかります。同様に他の道を通る進み方について考えます。

**道 AC を通る進み方。**

A から B までの進み方は全部で 20 通りです。A をスタートして上に行くか、右に行くか、進み方はちょうど半分ずつなので、道 AC を通る進み方は $20 \div 2 = 10$ 通り。

道 CD を通る進み方。

A→C は 1 通り。D→B は調べると 4 通り。よって道 CD を通る進み方は $1 \times 4 = 4$ 通り。

道 CF を通る進み方。

道 AC を通る進み方は 10 通り、道 CD を通る進み方は 4 通りなので、道 CF を通る進み方は $10 - 4 = 6$ 通り。

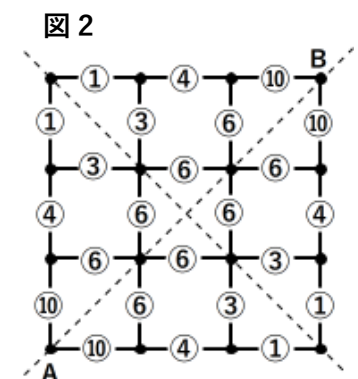
道 DG を通る進み方。

道 CD を通る進み方が 4 通り、道 DE を通る進み方が 1 通りなので、道 DG を通る進み方は $4 - 1 = 3$ 通り。

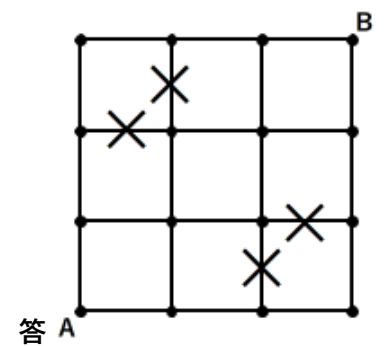
道 FG を通る進み方。

A→F は 2 通り。G→B は調べると 3 通り。
よって道 FG を通る進み方は $2 \times 3 = 6$ 通り。

対称性から、それぞれの道を通る進み方は図 2 のようになります。



$20 - 17 = 3$ より「3 通り」の道が通れなくなればいいので、答えは次のようになります。



問題 7

以下では、例えば A が 1 回目の宣言する数を A①、B が 5 回目の宣言する数を B⑤のように表すことにします。

(1)

A①=3 のとき、A②=7 で A が勝ちます。そこで B は A を勝たせないために B①で 7 を宣言します。次に A は B を勝たせないために A②で 3 を宣言します。同様に相手の合計の一の位を 0 にさせないように互いにゲームを進めて行くと表 1 のようになります。

B⑧で B を勝たせないために、A は A⑧で 1 を宣言する必要がありますが、B⑦=1 なので、1 を宣言することはできません。よって B⑧=1 で B が勝ちます。

表 1

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
A	3	3	9	4	3	5	2	×
合計の一の位	3	6	5	9	2	7	9	
B	7	4	5	1	8	3	1	1
合計の一の位	7	1	6	7	5	8	9	0

(2)

A が先手の場合。

表 2 の状態から考えます。A⑧で A を勝たせないために、B⑦で 3 を宣言する必要がありますが、3 を宣言できなかったのは A⑦=3 だったからです。A⑦=3 で合計の一の位が 7 になっているので、A⑥で合計の一の位は $7-3=4$ だったことがわかります。このとき次に B は A を勝たせないために B⑥で 4 を宣言します。同様にさかのぼって考えると表 3 のようになります。ただしこのとき A①=1 より、B①=9 のはずですが、B①=8 となっているため矛盾します。よって A は先手ではありません。

表 2

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
A								3
合計の一の位							7	0
B							×	
合計の一の位								

表 3

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
A	1	2	5	3	4	9	3	3
合計の一の位	1	3	8	1	5	4	7	0
B	8	7	2	9	5	6	×	
合計の一の位	8	5	7	6	1	7		

B が先手の場合。

A⑧で A を勝たせないために、B⑧で 3 を宣言する必要がありますが、3 を宣言できなかったのは A⑦=3 だったからです。同様にさかのぼって考えると表 4 のようになります。

表 4

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
A	1	2	5	3	4	9	3	3
合計の一の位	1	3	8	1	5	4	7	0
B	9	9	7	2	9	5	6	×
合計の一の位	9	8	5	7	6	1	7	

よって B が先手で、最初に宣言した数は 9 です。

答 (1) B, 1 (2) B, 9

問題 8

角 $ACB = 180 - (27 + 9 + 42 + 30) = 72^\circ$,
角 $ABC = \text{角 } ACB = 72^\circ$ より三角形 ABC は二等辺
三角形です。

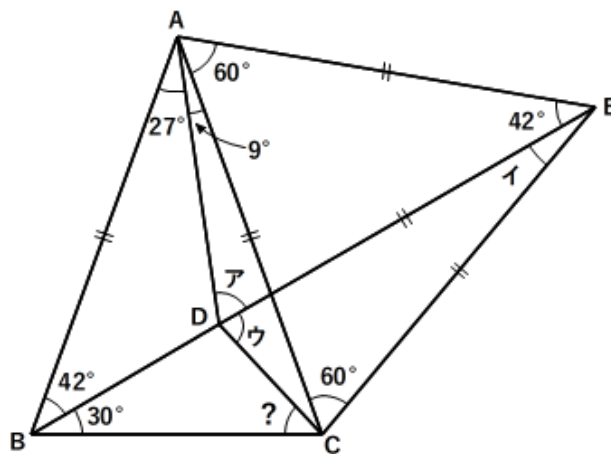
次に図のように BD を延長して、
二等辺三角形 ABE を作ります。

角 $CAE = 180 - 42 \times 2 - 27 - 9 = 60^\circ$ より
三角形 ACE は正三角形です。

角 $ア = 180 - (42 + 69) = 69^\circ$ より
三角形 EAD は二等辺三角形なので $AE = DE$ 。

このとき $DE = CE$ より**三角形 EDC も二等辺三角形**です。

角 $イ = 60 - 42 = 18^\circ$ より 角 $ウ = (180 - 18) \div 2 = 81^\circ$ 。
 $ウ = 30 + ?$ より $? = 81 - 30 = 51^\circ$ であることがわかります。



答 51 度