

広中杯 2025Jr ファイナル 解答

【問題 1】

(1) $f(k+l) + f(k) + f(l) = 17 \cdots \textcircled{1}$ であり、 $k+l < 7!$ であったとすると、 $k, l, k+l$ は $7!$ 未満の正の整数なので、 $7!$ の倍数ではないから、 $f(k), f(l), f(k+l)$ は 6 以下となる。

よって、 $\textcircled{1}$ より、 $(f(k), f(l), f(k+l)) = (6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6)$ に限られる。

しかし、 $f(k) = f(l) = 6$ とすると、 k, l は $6!$ の倍数なので、 $k+l$ も $6!$ の倍数となり、 $f(k+l) = 5$ とならず、 $f(k) = f(k+l) = 6$ とすると、 $k, k+l$ は $6!$ の倍数なので、 l も $6!$ の倍数であり、 $f(l) = 5$ とならず、

$f(l) = f(k+l) = 6$ とすると、 $l, k+l$ は $6!$ の倍数なので、 k も $6!$ の倍数であり、 $f(k) = 5$ とならない。

以上より、 $k+l \geq 7!$ であり、 $k = 5!, l = 5! \times 41$ のとき、 $k+l = 5! \times 42 = 7!$ となり、 $f(k) = 5, f(l) = 5,$

$f(k+l) = 7$ となるので、 $\textcircled{1}$ を満たす。よって、 $k+l$ の最小値は $7! = \boxed{5040}$

(2) $k = 5!, l = 4!, m = 4! \times 2$ のとき、 $k+l+m = 4! \times (5+1+2) = 4! \times 8$ であり、 $f(k) = 5, f(l) = 4,$

$f(m) = 4, f(k+l+m) = 4$ となるので、 $f(k+l+m) + f(k) + f(l) + f(m) = 17 \cdots \textcircled{2}$ を満たす。

k, l, m が $\textcircled{2}$ を満たし、 $k+l+m < 4! \times 8$ であったとすると、 $k, l, m, k+l+m$ は $5! \times 2 = 4! \times 10$ 未満なので、 $f(k), f(l), f(m), f(k+l+m)$ は全て 5 以下であり、 5 は高々 1 個である。よって、 $\textcircled{2}$ より、 $f(k), f(l), f(m), f(k+l+m)$ は $5, 4, 4, 4$ の並べ替えとなる。

$f(k) = f(l) = f(m) = 4, f(k+l+m) = 5$ とすると、 $k = 4! \times a, l = 4! \times b, m = 4! \times c$ とおけ、

$k+l+m$ は $4! \times 8$ 未満の $5!$ の倍数なので、 $k+l+m = 5!$ となり、 $a+b+c = 5$ となるが、これは、 k, l, m が相異なる正の整数なので、 a, b, c が相異なる正の整数となることに矛盾。

$f(k), f(l), f(m)$ が $4, 4, 5$ の並べ替えとすると、 $k+l+m \geq 4! + 4! \times 2 + 5! = 4! \times 8$ となり、矛盾。

以上より、 $k+l+m$ の最小値は $4! \times 8 = \boxed{192}$

【問題 2】

- (1) 一辺の長さが 1 の正 630 角形の外接円の周の長さは $L \times 3.1415 \dots$ であり、これは、一辺の長さが 1 の正 630 角形の周の長さよりも長いので、 $L \times 3.1415 \dots > 630$ である。よって、 $L > \frac{630}{3.1415 \dots} > \frac{630}{3.15} = 200$ より、
(あ) $L > 200$ となる。

- (2) (i) 四角形 ABCD がへこみのない四角形となるとき

(四角形 ABCD) = $3 + 5 = 8$, $\triangle BCD = 12$ より、(四角形 ABCD) $< \triangle BCD$ となり、不合理。

- (ii) 三角形 BCD の内部に点 A があるとき

$$(\triangle DAB) = (\triangle BCD) - (\triangle ABC) - (\triangle CDA) = 12 - 3 - 5 = 4$$

- (iii) 三角形 CDA の内部に点 B があるとき

$$(\triangle BCD) = 12, (\triangle CDA) = 5 \text{ より、} (\triangle BCD) > (\triangle CDA) \text{ となり、不合理。}$$

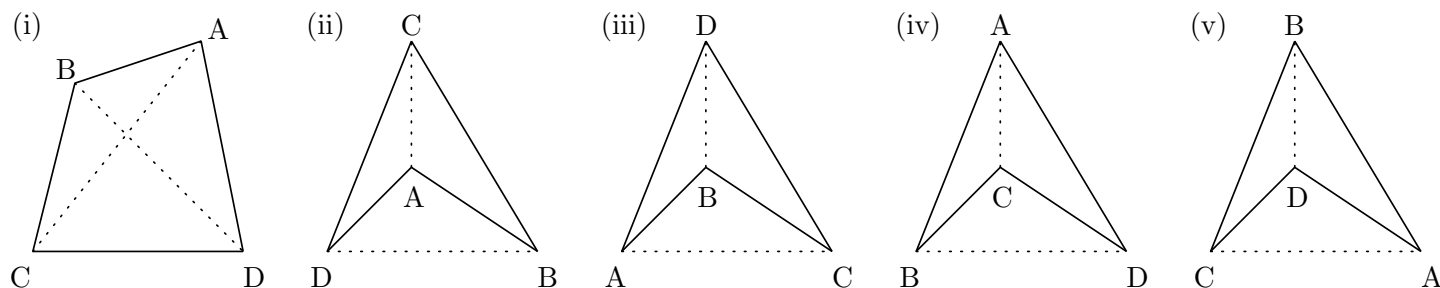
- (iv) 三角形 DAB の内部に点 C があるとき

$$(\triangle DAB) = (\triangle ABC) + (\triangle BCD) + (\triangle CDA) = 3 + 12 + 5 = 20$$

- (v) 三角形 ABC の内部に点 D があるとき

$$(\triangle BCD) = 12, (\triangle ABC) = 3 \text{ より、} (\triangle BCD) > (\triangle ABC) \text{ となり、不合理。}$$

以上より、三角形 DAB の面積としてあり得る値は、4, 20



- (3) 和が 16 の正の整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ であって、 $3^{a_1}, 3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きすることで 2025 となるようなものを求めたい。

$a_1 \geq 8$ とすると、 $3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きすることで $3^8 - 2025 = 4536$ 以上の数を作る必要があるが、 $a_2 + \dots + a_n \leq 8$ なので、以下の表より、 $n = 2$ かつ $a_2 = 8$ に限られ、このとき、 $a_1 = 8$ となるが、 3^8 と 3^8 を足し引きしても 2025 にはならないので、 a_1 は 8 以上ではない。同様に、 $a_2, \dots, a_n$ も 8 以上ではない。

$a_1, \dots, a_n$ が全て 6 以下であったとすると、 $3^{a_1} + \dots + 3^{a_n}$ の最大値は $3^6 + 3^6 + 3^4 = 1539$ なので、 $3^{a_1}, 3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きして 2025 になることはない。

よって、 $a_1, \dots, a_n$ の中に 7 が存在する必要がある。以下、 $a_1 = 7$ とし、 $a_2, \dots, a_n$ を和が 9 の正の整数とする。 $3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きして $3^7 + 2025 = 4212$ 以上の数になったとすると、 $a_2, \dots, a_n$ の中に 8 か 9 が必要となるが、いずれの場合も、 $3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きして 4212 になることはない。

また、 $3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きして $3^7 - 2025 = 162$ になったとすると、 $a_2 + \dots + a_n = 9$ および以下の表に注意して、 $a_2, \dots, a_n$ はいずれも 5 以下であり、「全てが 4 以下」になることもないことを確認することで、 $a_2, \dots, a_n$ の中に 5 があることがわかり、 $3^{a_2}, \dots, 3^{a_n}$ を上手く足し引きして 162 にする方法は、 3^5 と 3^4 の差を考える場合しかない。

以上より、与式の修正方法は

$$\textcircled{1} 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2025$$

$$\textcircled{2} 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2025$$

$$\textcircled{3} 3 \times 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2025$$

$$\textcircled{4} 3 \times 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2025$$

に限られ、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ の修正箇所はそれぞれ、8ヶ所, 11ヶ所, 11ヶ所, 8ヶ所なので、修正箇所の個数の最小値は 8 個 となる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683

- (4) $2025 \div 45 = 45$ より、1 以上 2025 以下の整数のうち、余りが 0 のものは商が $1, 2, \dots, 45$ のものがあり、余りが $1, 2, \dots, 44$ のものはいずれも、商が $0, 1, \dots, 44$ のものがある。条件を満たすように 45 個の整数を選んだとき、45 で割った余りが $0, 1, \dots, 44$ のものが 1 つずつある。

45 で割ったときの商が 45 で余りが 0 の整数を選んだとき、45 で割ったときの商が被らないように 45 で割った余りが $1, 2, \dots, 44$ の整数を 1 つずつ選ぶ方法は、 $45 \times 44 \times \dots \times 2$ 通り。

45 で割ったときの商が 45 でない余りが 0 の整数を選び、45 で割ったときの商が被らないように 45 で割った余りが $1, 2, \dots, 44$ の整数を 1 つずつ選ぶ方法は、 $44 \times 44 \times 43 \times \dots \times 1$ 通り。

よって、 $A = 45 \times 44 \times \dots \times 2 + 44 \times 44 \times 43 \times \dots \times 1 = 44! \times (45 + 44) = 44! \times 89$ であり、 $\frac{A}{45!} = \frac{89}{45}$

- (5) 正の整数を 9 倍したときの首位の数は、「変わらない」か「1 減る」か「1 から 9 になる」のいずれかである。この 3 つのケースのうち、首位の数が 1 から 9 に変わるときのみが桁数が変わらず、それ以外ときは桁数が 1 増えるので、 9^{1000} の桁数は 955 であり首位の数が 1 であることに注意して、 9^n と 9^{n+1} の首位の数がそれぞれ 1, 9 となる 1 以上 999 以下の整数 n は、 $1000 - 955 = 45$ 個。

よって、 9^n と 9^{n+1} の首位の数の組が $(9, 8), (8, 7), \dots, (2, 1)$ となる 1 以上 999 以下の整数 n は 46 個ずつ。

よって、 9^n と 9^{n+1} の首位の数が一致するような 1 以上 999 以下の整数 n は、 $999 - 46 \times 8 - 45 = \frac{586}{1}$ 個

- (6) $(a+1)(b+1) = a(b+1) + (b+1) = ab + a + b + 1$ より、どのように操作を行っても、黒板に書かれた全ての数に対し、1 を加えたものの総積は変わらない。よって、最初に黒板に書かれていた数を p, q, r, s, t, u とすると、 $(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)(t+1)(u+1) = -2024$ のとき、最後に残った数が -2025 となる。

$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ であり、 $p+1, q+1, r+1, s+1, t+1, u+1$ は積が -2024 の相異なる 1 以下の整数なので、 $1, -1, -2, -4, -11, -23$ の並べ替えとなる。

以上より、最初に黒板に書かれていた数は、 $0, -2, -3, -5, -12, -24$

【問題 3】

左下の図のよう、頂点および実線で囲まれた領域に名前をつけ、 C と書かれた 12 個の領域の面積の合計を U とする。

四角形 $P_2P_3P_{17}P_{18}$ の面積は、四角形 $P_2P_3P_{13}P_{14}$ の面積に等しく、四角形 $P_2P_3P_{13}P_{14}$ は右下の図のよう、面積 $\frac{1}{6}$ の三角形 16 個に分けられることに注意して、四角形 $P_2P_3P_{17}P_{18}$ の面積は $\frac{8}{3}$ となる。

同様に、四角形 $P_4P_5P_{15}P_{16}$, 四角形 $P_1P_{19}P_{20}P_{30}$ の面積もそれぞれ $\frac{8}{3}$ なので、 $T + U = \frac{8}{3} \times 3 = 8$

また、四角形 $P_6P_7P_{25}P_{26}$, 四角形 $P_8P_9P_{23}P_{24}$, 四角形 $P_{10}P_{11}P_{21}P_{22}$ の面積もそれぞれ $\frac{8}{3}$ なので、

$$S + U = 19 - \frac{8}{3} \times 3 = 11 \text{ となり、} S - T = (S + U) - (T + U) = 11 - 8 = \boxed{3}$$

