

広中杯 2025 ファイナル 解答

【問題 1】

- (1) $f(k+l) + f(k) + f(l) = 17 \cdots \textcircled{1}$ であり、 $k+l < 7!$ であったとすると、 $k, l, k+l$ は $7!$ 未満の正の整数なので、 $7!$ の倍数ではないから、 $f(k), f(l), f(k+l)$ は 6 以下となる。
よって、 $\textcircled{1}$ より、 $(f(k), f(l), f(k+l)) = (6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6)$ に限られる。
しかし、 $f(k) = f(l) = 6$ とすると、 k, l は $6!$ の倍数なので、 $k+l$ も $6!$ の倍数となり、 $f(k+l) = 5$ とならず、 $f(k) = f(k+l) = 6$ とすると、 $k, k+l$ は $6!$ の倍数なので、 l も $6!$ の倍数であり、 $f(l) = 5$ とならず、 $f(l) = f(k+l) = 6$ とすると、 $l, k+l$ は $6!$ の倍数なので、 k も $6!$ の倍数であり、 $f(k) = 5$ とならない。
以上より、 $k+l \geq 7!$ であり、 $k = 5!, l = 5! \times 41$ のとき、 $k+l = 5! \times 42 = 7!$ となり、 $f(k) = 5, f(l) = 5, f(k+l) = 7$ となるので、 $\textcircled{1}$ を満たす。よって、 $k+l$ の最小値は $7! = \boxed{5040}$
- (2) $k = 5!, l = 4!, m = 4! \times 2$ のとき、 $k+l+m = 4! \times (5+1+2) = 4! \times 8$ であり、 $f(k) = 5, f(l) = 4, f(m) = 4, f(k+l+m) = 4$ となるので、 $f(k+l+m) + f(k) + f(l) + f(m) = 17 \cdots \textcircled{2}$ を満たす。
 k, l, m が $\textcircled{2}$ を満たし、 $k+l+m < 4! \times 8$ であったとすると、 $k, l, m, k+l+m$ は $5! \times 2 = 4! \times 10$ 未満なので、 $f(k), f(l), f(m), f(k+l+m)$ は全て 5 以下であり、5 は高々 1 個である。よって、 $\textcircled{2}$ より、 $f(k), f(l), f(m), f(k+l+m)$ は 5, 4, 4, 4 の並べ替えとなる。
 $f(k) = f(l) = f(m) = 4, f(k+l+m) = 5$ とすると、 $k = 4! \times a, l = 4! \times b, m = 4! \times c$ とおけ、 $k+l+m$ は $4! \times 8$ 未満の $5!$ の倍数なので、 $k+l+m = 5!$ となり、 $a+b+c = 5$ となるが、これは、 k, l, m が相異なる正の整数なので、 a, b, c が相異なる正の整数となることに矛盾。
 $f(k), f(l), f(m)$ が 4, 4, 5 の並べ替えとすると、 $k+l+m \geq 4! + 4! \times 2 + 5! = 4! \times 8$ となり、矛盾。
以上より、 $k+l+m$ の最小値は $4! \times 8 = \boxed{192}$

【問題 2】

- (1) カードを並べることで作れる数を小さい順に列挙すると、2, 5, 20, 22, 25, 52, 55, 202, 205, 220, 222, 225, 252, 255, 520, 522, 525, 552, 555, 2020, 2022, 2025 なので、2025 は $\boxed{22 \text{ 番目}}$ に現れる。
- (2) $5202225 = 2025 \times 2569$ より、カードを並べることで作れる数のうち、2025 より大きく 20252025 より小さい 2025 の倍数は $\boxed{\text{存在する}}$
- N を各位の数字が 0, 2, 5 のいずれかの数であって、2025 より大きく 20252025 より小さい 2025 の倍数とすると、 N は 9 の倍数なので、 N の各位の和は 9 の倍数となる。よって、 N に使われている 2 の個数を a とし、5 の個数を b とすると、 $2a + 5b$ は 9 の倍数で $a + b \leq 8$ より、 $(a, b) = (1, 5), (2, 1), (4, 2)$ に限られる。
 N は 25 の倍数なので、 N の下 2 桁は 25 であることを加味すると、 $(a, b) = (1, 5)$ のとき、 $N = 555525$ に限られるが、これは 2025 の倍数ではなく、不適。また、 $(a, b) = (2, 1)$ のとき、2025 より大きい下 2 桁が 25 の数は作れない。そこで、 $(a, b) = (4, 2)$ のときを考えることで、上記の例を見つけることが出来る。
- 他に、条件を満たす数は、 $2205225 = 2025 \times 1089$ のみである。

【問題 3】

$2025^{2025} = (3^4 \times 5^2)^{2025} = 3^{8100} \times 5^{4050}$ より、黒板に書かれる数は $0 \leq a \leq 8100, 0 \leq b \leq 4050$ を満たす整数 a, b を用いて、 $3^a \times 5^b$ の形で表せる。先手が最初に 1 を 3 または 5 に書き替えたとき、有限回の操作後に $3^{8100} \times 5^{4050}$ が黒板に書かれ、これ以上は操作を行えず、 $3^{8100} \times 5^{4050}$ を書いた方の負けとなる。

以下、先手は黒板に書かれた数を 3 倍もしくは 5 倍したものに書き替えることで勝てることを示す。黒板に書かれた数に対し、3 で割り切れる回数と 5 で割り切れる回数の総和をその数のスコアと呼ぶことにする。 $3^a \times 5^b$ は操作によって、 $3^{a+1} \times 5^b, 3^a \times 5^{b+1}, 3^{2a}, 5^{2b}$ のいずれかに書き替えられるので、黒板に書かれた数のスコアが偶数のとき、黒板に書かれた数を 3 倍または 5 倍したものに書き替えることで黒板に書かれた数のスコアは奇数となり、黒板に書かれた数のスコアが奇数のとき、操作によって、黒板に書かれた数のスコアは偶数となる。

よって、先手は黒板に書かれた数を 3 倍もしくは 5 倍したものに書き替えることで、先手はスコアが奇数の数に書き替え、後手はスコアが偶数の数に書き替えることになるので、後手が $3^{8100} \times 5^{4050}$ を書いて操作が終了する。

よって、(あ) 先手が勝つ が答え。

【問題 4】

直線 HF と $\triangle ABC$ の外接円の交点のうち、H でない方を J とすると、 $\angle HJC = 180^\circ - \angle HBC = \angle HFE$ より、 $EF \parallel CJ$ であり、一方で、 $AI \parallel BC$ より、四角形 ABCI は等脚台形となることに注意して、 $\angle ICB = \angle ABC = \angle FEB$ より、 $EF \parallel CI$ となる。よって、I, J は C を通る EF に平行な直線と $\triangle ABC$ の外接円の交点なので、2 点 I, J は一致し、3 点 H, F, I は一直線上にある。

$\angle FBE = \angle FEB = \angle BDE$ より、 $\triangle FBE \sim \triangle BDE \cdots \textcircled{1}$ であり、 $FE : EB = BE : ED \cdots \textcircled{2}$

$\angle GCE = \angle CDE, \angle GEC = \angle CED$ より、 $\triangle GEC \sim \triangle CED \cdots \textcircled{3}$ であり、 $GE : EC = CE : ED \cdots \textcircled{4}$

よって、 $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ より、 $BE^2 : CE^2 = ED \times EF : ED \times EG = EF : EG = 24 : 54 = 4 : 9$ なので、 $BE : CE = 2 : 3$

よって、 $BE = 2x, CE = 3x$ とおけ、 $\angle BDE = \angle BED$ より、 $BD = 2x$ となる。 $\textcircled{1}$ より、 $\angle DBE = \angle BFE$ であることに注意して、 $\angle DBE = \angle AFG$ であり、 $\textcircled{3}$ より、 $\angle ECD = \angle EGC$ なので、 $\triangle BCD \sim \triangle FGA$ となる。

よって、 $GF : FA = CB : BD = 5x : 2x = 5 : 2$ であり、 $GF = 30$ より、 $FA = 12$

ここで、 $\angle FBE = \angle FEB$ より、 $FB = 24$ であり、四角形 ABCI は等脚台形なので、 $\angle FBE = \angle ICE$ であり、また、 $IC = AB = 36$ より、 $FB : BE = IC : CE (= 12 : x)$ となるので、 $\triangle FBE \sim \triangle ICE$ となる。

よって、 $FE = FB$ より、 $IE = IC = 36$ となり、 $FE : EI = 24 : 36 = 2 : 3, IE : EG = 36 : 54 = 2 : 3$ なので、 $\angle FEI = \angle IEG$ を加味して、 $\triangle FEI \sim \triangle IEG \cdots \textcircled{5}$

方べきの定理より、 $HF \times FI = AF \times FB$ なので、 $7 \times FI = 12 \times 24$ より、 $FI = \frac{288}{7}$ であり、 $\textcircled{5}$ より、

$EF : FI = EI : IG$ なので、 $24 : \frac{288}{7} = 36 : IG$ より、 $GI = \frac{432}{7}$

【問題 5】

1 以上 1000 以下の整数 a に対し、 $10a$ は 1001 の倍数ではないので、 $10a + b$ が 1001 の倍数となるような 1 以上 1000 以下の整数 b がただ 1 つ存在し、このときの b の値を $f(a)$ と表す。

$f(a) = a$ となるのは、 $11a$ が 1001 の倍数となるとき、つまり、 a が 91 の倍数のときである。よって、91 の倍数は選んではならない。

また、 $x = 10a + f(a)$, $y = 10f(a) + f(f(a))$ は 1001 の倍数なので、 $10y - 100x = 10f(f(a)) - 1000a = 10f(f(a)) + a - 1001a$ は 1001 の倍数であり、 $10f(f(a)) + a$ は 1001 の倍数となり、これは、 $f(f(f(a))) = a$ であることを意味する。

以上より、 $\{1, f(1), f(f(1))\}, \{2, f(2), f(f(2))\}, \dots$ のよう、1 以上 1000 以下の数のうち、91 の倍数を取り除いた 990 個の数を 3 個ずつに分割すると、同じ組から異なる 2 数を選ぶと条件を満たすことが出来ず、この 330 組から 1 つずつ整数を選んだ場合、条件は満たされる。以上より、整数は最大で 330 個 選ぶことが出来る。